Fundamentos e História da Matemática

Prof. Jairo Gayo

UNIASSELVI

2012

Elaboração:

Prof. Jairo Gayo

Revisão, Diagramação e Produção:

Centro Universitário Leonardo da Vinci – UNIASSELVI

Ficha catalográfica elaborada na fonte pela Biblioteca Dante Alighieri

UNIASSELVI – Indaial.

510
G288f Gayo, Jairo.
Fundamentos e História da Matemática / Jairo Gayo.
Centro Universitário Leonardo da Vinci – Indaial, Grupo
UNIASSELVI, 2010.x ; 196 p.: il

Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-7830-348-8

1. Matemática 2. Fundamentos da. I.Centro
Universitário Leonardo da Vinci II. *Núcleo de Ensino a Distância* III. Título

APRESENTAÇÃO

Este livro de Estudos foi elaborado para que você tenha um conhecimento bastante consistente sobre Fundamentos e História da Matemática. Estes conhecimentos são indispensáveis para a formação dos futuros licenciados em Matemática, pois mostra o lado cultural da disciplina. A evolução da matemática, ao longo dos anos, mostra que ela não é uma disciplina pronta, acabada, mas, sim, sujeita a melhoras, influenciadas pelas mais diversas situações.

Na primeira unidade serão abordados os sistemas numéricos mais importantes da História, começando pela Pré-História até os dias atuais. Cada povo possuía (e ainda possui) uma língua, uma religião ou uma tradição familiar, que são próprios de sua cultura, da mesma forma ocorre com seus sistemas numéricos. Logo, a Matemática é uma forma de expressão cultural que é inerente à existência humana.

Isto que ocorre com os sistemas numéricos também ocorre com a Geometria, com a Álgebra, com a Estatística e com todas as outras áreas da Matemática, são expressas de forma diferente ao longo do tempo, mas sempre com as mesmas características e propriedades de cada área.

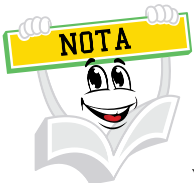
Na Unidade 2 veremos, além da evolução dos conjuntos numéricos e da contribuição de Gauss para a Matemática, a evolução da Geometria e da Álgebra. Nesta unidade serão abordadas a história do Cálculo Diferencial e Integral, da Estatística e da Teoria dos Conjuntos. Para concluir nosso livro, na terceira unidade será abordada a importância da história da Matemática na formação do aluno.

Esta visão da história da Matemática, como ferramenta de ensino, está presente em todo o livro, porém com uma ênfase no último tópico, no qual serão abordadas as tendências de ensino que privilegiam a história da Matemática, os estudiosos que fundamentam esta teoria e algumas obras em que você possa buscar mais informações a respeito.

A história da Matemática faz parte da cultura do professor de Matemática, que deve saber sobre os grandes matemáticos da história e da Matemática desenvolvida por cada povo ao longo do tempo. Tudo que tem uma história se torna mais interessante.

Bons estudos!

Prof. Jairo Gayo



Você já me conhece das outras disciplinas? Não? É calouro? Enfim, tanto para você que está chegando agora à UNIASSELVI quanto para você que já é veterano, há novidades em nosso material.

Na Educação a Distância, o livro impresso, entregue a todos os acadêmicos desde 2005, é o material base da disciplina. A partir de 2017, nossos livros estão de visual novo, com um formato mais prático, que cabe na bolsa e facilita a leitura.

O conteúdo continua na íntegra, mas a estrutura interna foi aperfeiçoada com nova diagramação no texto, aproveitando ao máximo o espaço da página, o que também contribui para diminuir a extração de árvores para produção de folhas de papel, por exemplo.

Assim, a UNIASSELVI, preocupando-se com o impacto de nossas ações sobre o ambiente, apresenta também este livro no formato digital. Assim, você, acadêmico, tem a possibilidade de estudá-lo com versatilidade nas telas do celular, *tablet* ou computador.

Eu mesmo, UNI, ganhei um novo *layout*, você me verá frequentemente e surgirei para apresentar dicas de vídeos e outras fontes de conhecimento que complementam o assunto em questão.

Todos esses ajustes foram pensados a partir de relatos que recebemos nas pesquisas institucionais sobre os materiais impressos, para que você, nossa maior prioridade, possa continuar seus estudos com um material de qualidade.

Aproveito o momento para convidá-lo para um bate-papo sobre o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes – ENADE.

Bons estudos!

BATE PAPO SOBRE O ENADE!

Olá, acadêmico!

Você já ouviu falar sobre o **ENADE**?

Se ainda não ouviu falar nada sobre o ENADE, agora você receberá algumas informações sobre o tema.

Ouviu falar? Ótimo, este informativo reforçará o que você já sabe e poderá lhe trazer novidades.

Vamos lá!

Qual é o significado da expressão ENADE?

EXAME NACIONAL DE DESEMPENHO DOS ESTUDANTES

Em algum momento de sua vida acadêmica você precisará fazer a prova ENADE.

Que prova é essa?

É **obrigatória**, organizada pelo INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

Quem determina que esta prova é obrigatória... O **MEC – Ministério da Educação**.

O objetivo do MEC com esta prova é o de avaliar seu desempenho acadêmico assim como a qualidade do seu curso.

Fique atento! Quem não participa da prova fica impedido de se formar e não pode retirar o diploma de conclusão do curso até regularizar sua situação junto ao MEC.

Não se preocupe porque a partir de hoje nós estaremos auxiliando você nesta caminhada.

Você receberá outros informativos como este, complementando as orientações e esclarecendo suas dúvidas.

Você tem uma trilha de aprendizagem do ENADE, receberá e-mails, SMS, seu tutor e os profissionais do polo também estarão orientados.

Participará de webconferências entre outras tantas atividades para que esteja preparado para #mandar bem na prova ENADE.

Nós aqui no NEAD e também a equipe no polo estamos com você para vencermos este desafio.

Conte sempre com a gente, para juntos mandarmos bem no ENADE!

UNIASSELVI

SUMÁRIO

UNIDADE 1

HISTÓRIA DOS NÚMEROS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

A partir desta unidade, você será capaz de:

- entender como se deu a evolução dos números através dos sistemas numéricos, da Pré-História até os dias atuais;
- reconhecer e entender o funcionamento dos sistemas numéricos das principais civilizações da história;
- reconhecer e entender o funcionamento e as aplicações dos principais sistemas numéricos da atualidade;
- compreender a história dos números para facilitar o processo ensino-aprendizagem na disciplina de Matemática.

PLANO DE ESTUDOS

Os estudos desta unidade serão apresentados em quatro tópicos, listados a seguir:

TÓPICO 1 – OS PRIMEIROS NÚMEROS

TÓPICO 2 – SISTEMAS NUMÉRICOS DE ANTIGAS CIVILIZAÇÕES

TÓPICO 3 – O NOSSO SISTEMA

TÓPICO 4 – ATUALIDADES

TÓPICO 1

OS PRIMEIROS NÚMEROS

1 INTRODUÇÃO

Uma pergunta que os alunos sempre fazem quando estão estudando Matemática é: quem inventou a Matemática? Se considerarmos que o simples fato de contar até 4 é Matemática, então podemos dizer que o homem já sabia Matemática há muito tempo antes de ser chamado de *homo sapiens*.

> Segundo um estudo realizado na Alemanha, na Universidade de Tübingen, os Macacos-rhesus (Macaca mulatta) conseguem resolver operações matemáticas simples. [...] Os investigadores chegaram então à conclusão que a matemática foi uma vantagem evolutiva. Se os macacos souberem escolher a árvore com mais frutos ou conhecer o número de elementos do seu grupo e podê-lo comparar com outros, a sobrevivência é-lhes sem dúvida facilitada.

FONTE: Disponível em: <http://www.mundodosanimais.com/blog/2010/macacos-que-sabem-fazer-contas/>. Acesso em: 20 maio 2010.

Se a Matemática contribuiu para a evolução dos macacos-rhesus, contribuiu muito mais para a evolução dos seres humanos. Podemos enfim responder à pergunta feita pelos alunos dizendo que quem inventou a Matemática foi um antepassado do homem que viveu há milhares de anos, muito antes dos homens das cavernas.

Saber contar não é apenas privilégio dos homens e dos macacos. No reino animal, existem muitas espécies, como cães, elefantes e até os peixes, que conseguem efetuar contagens pequenas e identificar quantidades visivelmente diferentes.

É o caso dos peixes *Gambusia holbrooki*, que, segundo o professor Christian Agrillo,

> [...] para se proteger dos predadores, tendem a formar grupos numerosos. Através de experimentos em laboratório, observamos que, colocando um peixe num lado de um aquário frente a dois grupos de peixes de número diverso, o peixe solitário reconhece o maior e tende a se juntar a ele. O peixe solitário faz sua escolha sempre que fica diante de grupos com dois e três membros ou com três e quatro integrantes. No entanto, quando tem que escolher entre pequenos cardumes com cinco ou seis peixes, o animal solitário não consegue distinguir qual dos dois é maior. Com base nisso, os cientistas chegaram à conclusão que o *Gambusia holbrooki* sabe contar até quatro, embora também consiga diferenciar grupos maiores de peixes. FONTE: Disponível em: <http://meusviralatas.blogspot.com/2008/02/estudo-italiano-mostra-que-espcie-de.html>. Acesso em: 20 maio 2010.

Os pesquisadores ainda acreditam que esta característica seja pertinente a todos os peixes de cardumes, pois, quanto maior for o cardume mais protegido o peixe está. Sabendo que os peixes são os animais vertebrados mais antigos a habitarem a Terra, podemos também concluir que a Matemática já é utilizada neste planeta muito antes da presença humana.

O que fez o homem se diferenciar dos outros animais foi a capacidade de utilizar métodos e utensílios para a contagem, podendo, dessa forma, guardar e conferir com mais precisão quantidades muito superiores às dos outros animais. Este período da existência humana é denominado de Pré-História.

2 PRÉ-HISTÓRIA

A Pré-História, período que engloba o aparecimento dos primeiros homens e a invenção da escrita, era tida como fase que antecipa a história. Sem registro escrito não havia história. No entanto, para investigar o que os homens do passado fizeram, como viveram e o que nos legaram, não podemos nos limitar à análise de fontes escritas, pois todo e qualquer objeto criado pelo homem que seja capaz de transmitir ou perpetuar uma informação é uma fonte de história. Assim, monumentos, pinturas, construções, roupas, moedas, utensílios, e mesmo depoimentos são considerados fonte de pesquisa. Este primeiro período da história do homem é descortinado devido a análises destes materiais.

A Pré-História é dividida em três fases distintas: Paleolítico, Neolítico e Idade dos Metais. No Paleolítico, o homem vagava nômade em busca de alimentos, vivia nas copas de árvores e posteriormente em cavernas. Desenvolveu a habilidade de fabricar ferramentas de pedra (lascando-as) e dominou o fogo. Já a fase neolítica é marcada por uma revolução. O homem, além de evoluir no processo de fabricação de ferramentas, usando o polimento de pedras, domestica animais e começa o cultivo de trigo e cevada, dominando a produção de seu alimento, criando a agricultura e tornando-se sedentário. A Idade dos Metais tem como característica a substituição dos instrumentos de pedra por metais encontrados na natureza e a organização dos grupos em comunidades com divisão de classes e regras.

Neste período o homem utilizava os números apenas para contagem, contava ovelhas nos rebanhos ou pessoas em sua tribo. Para isto, apenas utilizava os dedos das mãos e dos pés, ou partes do corpo. Os registros numéricos escritos se limitavam a marcações feitas nas paredes de cavernas, em pedaços de pau ou em ossos de animais.

Os conhecimentos sobre a Matemática desta época são provenientes de vestígios encontrados em sítios arqueológicos de diversas partes do mundo. Em um sítio arqueológico na República Tcheca, foi encontrado um osso de lobo com incisões dispostas em grupos de cinco, totalizando 55 marcações. As marcações em grupos de cinco unidades são escolhidas pela familiaridade que esta quantidade tem em relação aos dedos das mãos.

Em escavações na antiga Babilônia, foram encontrados saquinhos feitos com couro de cabra contendo pequenas pedras. Alguns arqueólogos supõem que estes saquinhos eram utilizados por pastores como forma de controlar o tamanho dos seus rebanhos. Pela manhã, quando soltavam as cabras para o pastoreio, colocavam no saquinho pedras em mesmo número de cabras do rebanho. Ao recolher as cabras à noite, se sobrassem pedras no saquinho, estava evidente que alguma cabra havia se perdido e caso faltassem pedras, era sinal que havia algum filhote novo ou que a cabra de algum outro rebanho tinha se juntado a este.

Observando os saquinhos de pedras encontrados, os estudiosos supõem que amontoar pedras seria outra forma de contagem que também fora utilizada pelo homem primitivo. Sempre que a contagem era superior aos dedos das mãos, recorria-se a montes de pedras com cinco unidades, cada monte representando mais uma mão.

Os relatos desta época não passam de suposições baseadas em vestígios arqueológicos, afinal a escrita ainda não havia sido desenvolvida. Além dos vestígios, outra importante fonte de pesquisa, que ajuda a descobrir como seria a Matemática pré-histórica, é a observação dos povos ágrafos que ainda hoje habitam regiões isoladas do nosso planeta.

3 OS POVOS ÁGRAFOS

São denominados povos ágrafos comunidades que não possuíam escrita antes do contato com a cultura europeia ocidentalizada. Diversas tribos ágrafas vivem isoladas em diversas partes do mundo, como na Floresta Amazônica, nas savanas africanas e em ilhas da Oceania. Cada tribo destas possui um tipo diferente de contagem e concebe a Matemática de seu próprio jeito dentro de sua cultura.

A palavra ágrafo significa sem grafia, sem escrita. Os povos ágrafos são povos que não possuem ou não possuíam escrita própria.

Estudar o dia a dia destes povos pode nos ajudar a entender como viviam os homens pré-históricos. Os antropólogos acreditam que os conceitos matemáticos utilizados por elas nos ajudam a entender a Matemática antes da escrita.

Resquícios dos tipos de contagens que ainda podem ser encontrados junto às diversas tribos ágrafas existentes nos levam a concluir que a origem da Matemática não foi única e que diversas civilizações contribuíram para a o nível de desenvolvimento que a matemática alcançou hoje.

No Estreito de Torres, localizado nas Ilhas Murray, Oceania, foram encontrados grupos indígenas que apenas atribuíam vocábulos a dois números: *urapun*, que corresponde ao um, e *okosa*, que significa dois. A partir destes, o três seria *okosa urapun*, o quatro, *okosa okosa*, o cinco, *okosa okosa urapun*, e o seis, *okosa okosa okosa*. Para os demais valores, eles simplesmente não possuíam vocalização.

Para alguém desatento, poderia parecer que este povo sabia contar apenas até seis. Contudo, para representar outros valores numéricos, utilizavam o método mnemônico que empregava os dedos e outras partes do corpo para representar os números. Observe a figura a seguir.

FIGURA 1 – TRIBOS DE INDÍGENAS DAS ILHAS MURRAY – ESTREITO DE TORRES

FONTE: Fontes (1969, p. 5)

Isto nos sugere uma vocalização numérica que relaciona números e partes do corpo. Por exemplo: cotovelo esquerdo significa sete, onze é chamado de coração e assim por diante, conforme a figura.

Outra civilização que também não possuía escrita e que impressiona pela sofisticação no método de contagem foram os Incas.

3.1 CIVILIZAÇÃO INCA

O império inca se estendia por praticamente toda a cordilheira dos Andes, desde o norte da atual Argentina até o Equador, passando por Peru, Bolívia e Chile. Este vasto império era interligado por vias pavimentadas na qual percorriam produtos, pessoas e informações.

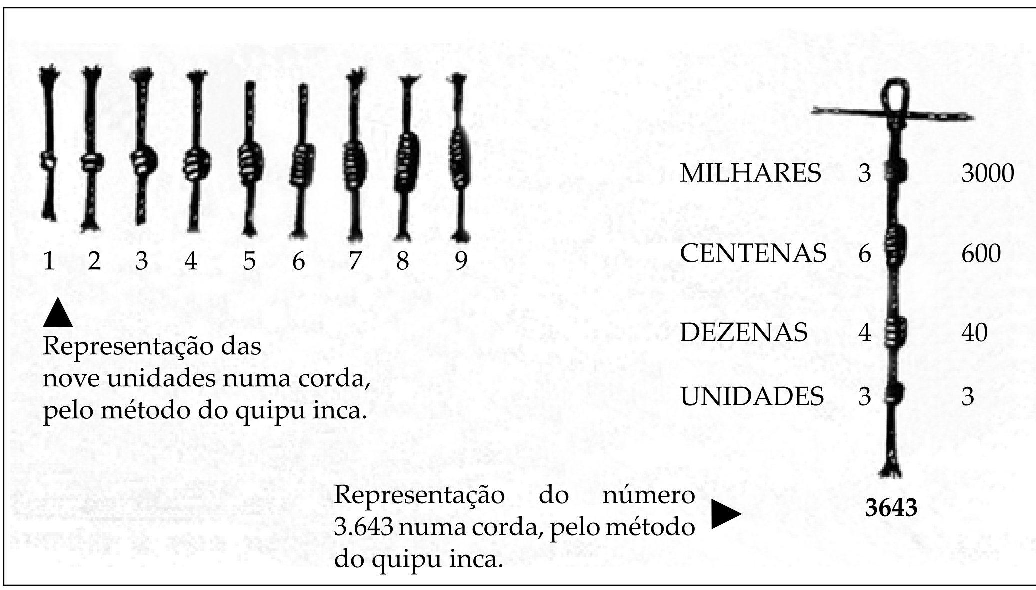
Para Ifrah (1997), o alto grau cultural e a prosperidade do império parecem, à primeira vista, contrastar com a ausência da escrita, porém eles mantinham arquivos e uma contabilidade impecável, graças ao uso que faziam de um sistema muito elaborado de nós em cordões coloridos denominados quipos.

NOTA

A palavra quipo ou *quipu* vem do quíchua, língua falada pelos incas, e significa nós. Atualmente esta língua ainda é falada nas regiões andinas do Peru e da Bolívia. Tal como a língua, a população destas áreas também utiliza uma espécie de quipo, que com o tempo sofreu diversas alterações em relação aos quipos da época dos incas.

Este tipo de dispositivo consistia em uma corda principal com aproximadamente 60 cm de comprimento. Eram atados nela vários cordões mais finos de diversas cores, neles havia diversos tipos de nós amarrados em intervalos regulares.

FIGURA 2 – UNIDADES DO SISTEMA INCA



FONTE: Ifrah (1997, p. 100)

Segundo Ifrah (1997), os quipos possuíam funções bastante variadas. A cor e a posição dos cordões, o tipo de nó e o espaçamento entre eles possuíam significados bastante precisos. Com eles se representavam cronologicamente dados de um calendário litúrgico, marcavam as luas, estações e os anos, além de contabilizar e conservar resultados de colheitas, permitindo um apurado levantamento estatístico sobre elas.

Em cada cidade ou aldeia havia encarregados de confeccionar e interpretar os quipos. Estes guardiões eram denominados de quipocamayocs. Eles eram responsáveis por registrar tudo o que ocorria na aldeia; faziam o recenseamento contando o número de habitantes por classe social, os nascimentos, os casamentos e as mortes. Registravam as colheitas e seus estoques, os animais mortos nos grandes abates anuais e os materiais disponibilizados aos trabalhadores do império. Com estes dados, podia-se controlar todo o império, cobrar tributos e tomar decisões militares.

Como se vê, não é porque um povo não possui escrita que ele não tem história ou não pode se desenvolver. Da mesma forma, a Matemática de um povo não pode ser considerada ruim ou primitiva só porque não possui símbolos gráficos. Dos povos ágrafos, os incas foram os que atingiram o mais alto nível de desenvolvimento tecnológico, graças aos quipos.

4 OS INDÍGENAS BRASILEIROS

Quando os portugueses chegaram ao Brasil em 1500, habitavam estas terras aproximadamente 10 milhões de índios distribuídos em diversas sociedades que falavam aproximadamente 1300 línguas diferentes. Assim como a língua era muito diversificada, acredita-se que os sistemas de numeração também variavam muito devido ao vasto território. “Quando uma nova terra é colonizada, a população cresce e se dispersa rapidamente, o que leva à diversidade linguística” (FUNARI; NOELLI, 2005, p. 44).

A antropóloga Diana Green, em seu artigo “Diferenças entre termos numéricos em algumas línguas indígenas do Brasil”, pesquisou o sistema de 47 grupos linguísticos no país, constatou diferentes formas de numeração em todos os grupos. Ela afirma que se encontram nessas línguas sistemas numéricos de base um, dois, três, cinco, dez, ou vinte, os quais demonstram diversos processos de raciocinar. Algumas tribos do grupo linguístico Jê não possuem termos numéricos específicos, limitando-se apenas a termos como “só”, “um par”, “alguns” e “muitos”. Já a língua Kadiwéu possui termos para todos os valores de 1 a 99 e na língua Palikúr existem muitos (não todos) termos para valores até 199. A autora do artigo ainda afirma que os sistemas de numeração de cada tribo são suficientes para atender às suas necessidades do cotidiano.

FONTE: Adaptado de: <www.sil.org/americas/brasil/publcns/ling/NumBrasi.pdf>. Acesso em: 31 maio 2010.

Um dos povos de maior expressão na cultura indígena brasileira é seguramente o Tupi. Estes povos habitavam o litoral brasileiro muito tempo antes da chegada dos colonizadores europeus. Como retiravam tudo o que precisavam da natureza, não precisavam acumular riquezas. Eram nômades e possuir muita coisa também era algo que dificultava a locomoção de um lugar para outro. Devido a isto, não possuíam vocábulos para representar valores maiores de 20.

Segundo o professor Vitor Amadeu Sousa, o sistema de numeração Tupi funciona da seguinte forma:

1 → Jepé
2 → Mocõi
3 → Mossapyr
4 → Irundyc
5 → Xe pó

O cinco que em Tupi é Xe pó quer dizer minha mão, que contém cinco dedos. Sendo assim, poderíamos falar de seis a nove da seguinte forma:

6 → Xe pó jepé
7 → Xe pó mocõi
8 → Xe pó mossapyr
9 → Xe pó irundyc
10 → Mocõi pó

No caso dez seriam duas mãos, neste caso mocõi pó. Sendo assim, de 11 até 19, os índios contavam da seguinte forma:

11 → Mocõi pó jepé
12 → Mocõi pó mocõi
13 → Mocõi pó mossapyr
14 → Mocõi pó irundyc
15 → Mocõi pó Xe pó
16 → Mocõi pó Xe pó jepé
17 → Mocõi pó Xe pó mocõi
18 → Mocõi pó Xe pó mossapyr
19 → Mocõi pó Xe pó irundyc

E como seria a contagem do 20? Neste caso seria Xe pó Xe py, que seria, em português, minha mão e meu pé, que neste caso resultaria em 20.

FONTE: Disponível em: <www.cerne-tec.com.br/sistemas_numeracao_antigos.pdf>. Acesso em: 31 maio 2010.

Conhecer a Matemática indígena nos permite compreender seu modo de vida e que a Matemática faz parte da cultura de um povo. Para os Tupis, contar mais que 20 era absolutamente desnecessário. Cada povo tem a Matemática desenvolvida de acordo com suas necessidades. A Matemática da atualidade foi desenvolvida graças à necessidade de vários povos ao longo da história.

RESUMO DO TÓPICO 1

Neste tópico você acompanhou:

- Que vários seres vivos têm noções de quantidade.

- As variadas formas de contagem desenvolvidas pelos povos pré-históricos têm relação com suas necessidades cotidianas.

- Os povos ágrafos, apesar de não desenvolverem escrita, faziam contagens usando partes do corpo, peças cerâmicas ou osso ou, ainda, atribuindo sons às quantidades.

- A civilização Inca desenvolveu um sistema de registro chamado quipos, consistindo em cordões coloridos com nós, representando as quantidades de colheitas, pessoas e impostos.

- No Brasil os grupos indígenas elaboraram vocalizações para os números, entre eles o Tupi, de maior importância.

AUTOATIVIDADE

Responda às seguintes questões:

1 Como eram feitos os registros numéricos no período pré-histórico?

2 Para quais finalidades os homens da Pré-História usavam a Matemática?

3 Como os povos ágrafos desenvolveram a contagem, se não usavam a escrita?

4 Explique o funcionamento do sistema de registro de quantidades desenvolvido pelos incas.

5 Justifique a frase: “Para os Tupis, era completamente desnecessário saber contar além de 20”.

TÓPICO 2

SISTEMAS NUMÉRICOS DE ANTIGAS CIVILIZAÇÕES

1 INTRODUÇÃO

Neste tópico serão apresentados os sistemas numéricos mais importantes que já existiram, seja pela vultuosidade da civilização que o criou ou pela importância que teve no desenvolvimento da Matemática e da ciência. Você observará que cada um possui uma peculiaridade, um estilo ligado à sua cultura, mas nem por isso fogem da lógica e dos conceitos matemáticos de ordem, sequência e quantidade.

Analisar a origem e a evolução de um sistema poderá fazer com que o(a) acadêmico(a) veja a Matemática como algo dinâmico e vivo. Cada sistema com sua característica, curiosidade e seus princípios matemáticos, pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem. Os sistemas diferem na grafia ou na forma de representar, mas a Matemática e seus princípios são únicos em todos.

2 OS MESOPOTÂMICOS E OS MAIAS

Você deve estar se perguntando: que mistura é essa entre maias e mesopotâmicos? Os maias foram uma civilização que ocupou a América Central entre os séculos V e XIII, e quando os conquistadores europeus chegaram à América, esta civilização já estava em completo declínio. Organizavam-se em cidades-estado independentes, viviam da agricultura, tinham sociedade hierárquica, eram exímios conhecedores da Matemática, Astronomia e desenvolveram a escrita. O aumento populacional gerou um esgotamento de terras, as cidades-estado começaram a se enfrentar e a civilização entrou em decadência.

A Mesopotâmia, região entre os Rios Tigre e Eufrates, no Oriente Próximo (hoje Iraque) sofreu sucessivas ocupações de povos que buscavam terras férteis para se estabelecerem. No ano de 1900 a.C. foi invadida de maneira autoritária e centralizadora pelos Babilônios, que fundaram o segundo império da Mesopotâmia. Transformaram este local em um dos maiores centros comerciais da Antiguidade, e para regulamentar a vida de tantas pessoas, criaram o primeiro código de leis escrito do mundo, o Código de Hamurábi, baseado na lei de Talião "olho por olho, dente por dente", na qual a punição deveria ser idêntica ao crime.

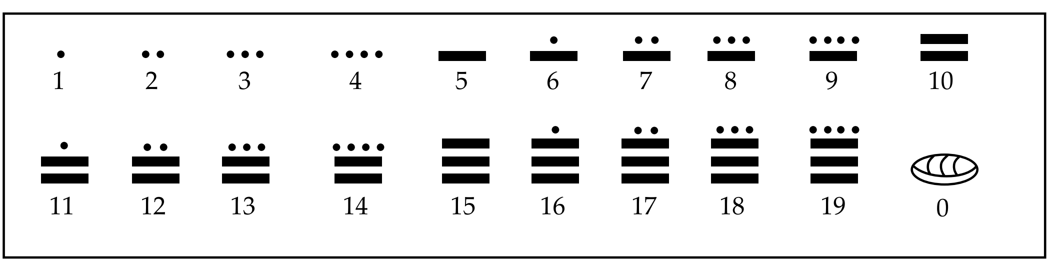
O Código de Hamurábi pode ser visto e apreciado no Departamento de Antiguidades Orientais do Museu do Louvre, em Paris.

Ficou claro que um encontro entre estas duas civilizações seria inviável. Além destes dois grupos não serem contemporâneos, pois, pouco mais de 500 anos os separam, a localização geográfica é bem distinta numa época em que a comunicação intercontinental era praticamente inexistente. No entanto, apesar de todas essas diferenças, estes dois grupos possuem duas semelhanças que chamam a atenção: a primeira é o desenvolvimento de uma escrita própria, genuína, e a outra, um sistema de numeração com diversas características comuns.

2.1 O SISTEMA DE NUMERAÇÃO MAIA

O sistema de numeração maia era composto por 20 algarismos, portanto, um sistema de numeração vigesimal, entre eles um símbolo para representar o zero. Como podemos ver a seguir, um ponto representava o algarismo um, dois pontos o dois, e assim até o cinco, representado por um traço horizontal. O seis seria um traço e um ponto, o sete um traço e dois pontos. O número dez era representado por dois traços, duas vezes o cinco, o onze era dois traços e um ponto e assim até o número dezenove, três traços e quatro pontos, três vezes cinco mais quatro unidades.

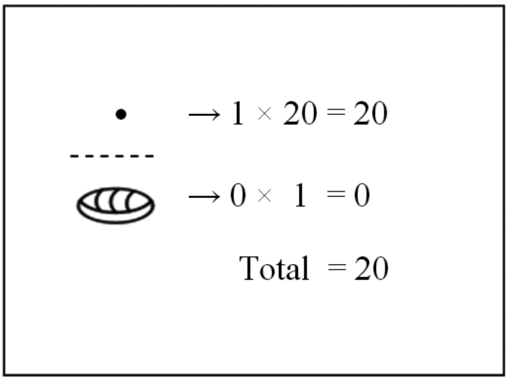
FIGURA 3 – ALGARISMOS MAIAS



FONTE: Adaptado de: Imenes e Lellis (1998, p. 346)

Cada símbolo da figura é um algarismo. Observe que os números do dez ao dezenove, que no nosso sistema são compostos de dois algarismos, no sistema maia possuem um algarismo próprio. Tal qual o nosso sistema, este era um sistema posicional. Para escrever o número vinte, colocava-se um ponto e abaixo um símbolo, parecido com uma concha, representando o zero, este um e zero seria como "uma vintena" (fazendo referência à dezena do sistema decimal). Para separar uma casa vigesimal da outra, eram feitas linhas de separação.

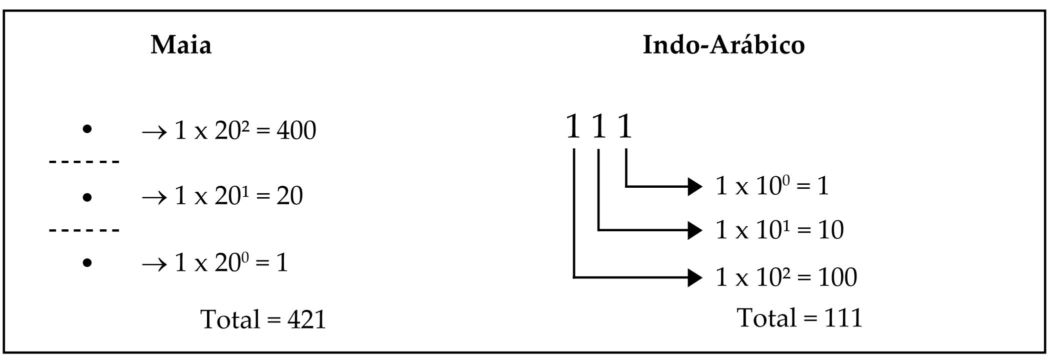
FIGURA 4 – NÚMERO 20 NO SISTEMA NUMÉRICO MAIA



FONTE: O autor

No sistema indo-arábico, temos as casas decimais dispostas horizontalmente, sendo as da direita com menor valor e as da esquerda com maior valor. No sistema maia, as casas eram vigesimais e dispostas verticalmente, sendo as de cima as de maior valor e as debaixo de menor valor. Pelo fato de um sistema ser decimal e o outro vigesimal, as posições possuem valores diferentes nos dois sistemas. Observe a seguinte figura.

FIGURA 5 – COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS MAIA E INDO-ARÁBICO



FONTE: O autor

Nos dois sistemas, o número é composto por três algarismos 1, porém representam valores diferentes já que no indo-arábico cada posição (casa) é multiplicado por uma potência de 10, enquanto que no maia, por uma potência de 20.

A cultura maia entrou em decadência no final do século XII, quando os europeus chegaram, desprezaram completamente a cultura dos povos americanos, considerando seus conhecimentos (inclusive matemáticos) como primitivos e insignificantes. Este sistema foi resgatado e interpretado novamente apenas no início do século XX, quando os arqueólogos Joseph Goodman, Juan Martínez Hernández e John Eric Sydney, estudavam o funcionamento e o início do calendário maia.

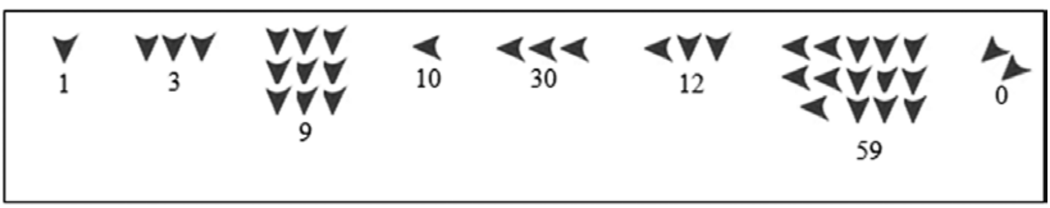
2.2 O SISTEMA NUMÉRICO MESOPOTÂMICO

Os mesopotâmicos não haviam desenvolvido o papel, porém desenvolveram uma escrita cuneiforme em tabuletas de barro. Enquanto o barro estava mole, eles marcavam estas tabuletas com estiletes, o que dava às letras e aos números um formato cuneiforme. Depois de preenchidas, estas tabuletas eram assadas, em fornos ou ao sol, para que os registros permanecessem inalteráveis.

A necessidade de contabilizar os rebanhos, as colheitas, os escravos e a população no cotidiano da civilização mesopotâmica fez com que desenvolvessem um método de registro destas quantidades.

Possuíam algarismos para os 59 primeiros números e um símbolo para representar a ausência de algarismos, ou seja, o zero. Pode parecer que manipular 59 algarismos é algo muito difícil, e realmente é, porém os babilônicos desenvolveram um método de escrita que facilita a sua interpretação e manipulação. Na figura a seguir representaremos alguns destes 59 algarismos e o símbolo equivalente ao zero.

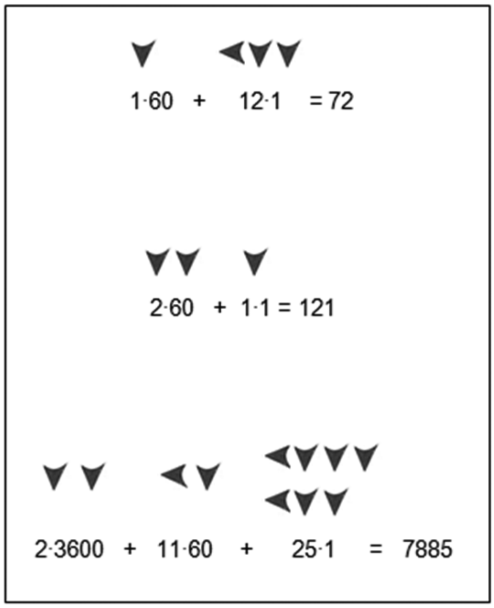
FIGURA 6 – ALGARISMOS MESOPOTÂMICOS



FONTE: Adaptado de: Imenes e Lellis (1998, p. 342)

Observe que os símbolos cuneiformes com ponta voltada para baixo representam unidades e os com pontas voltadas para a esquerda representam dezenas. Estes símbolos eram escritos bem agrupados de tal forma que se transformavam em um só algarismo. Para representar valores maiores que 60, utilizavam dois ou mais algarismos, da mesma forma que nós fizemos com os números maiores que 9.

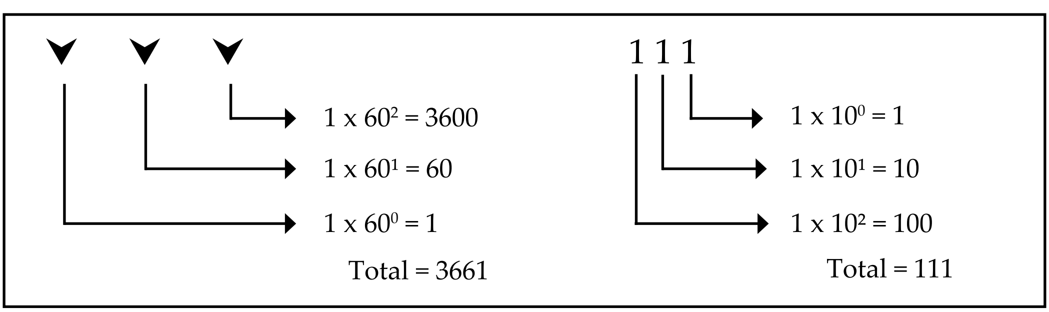
FIGURA 7 – NÚMEROS MESOPOTÂMICOS



FONTE: Adaptado de: Imenes e Lellis (1998, p. 342)

Veja que cada agrupamento é um algarismo e entre eles deixava-se um espaço. Desta forma, o número 121 da figura 7 não era confundido com o número 3 da figura 6. Tal qual o nosso sistema, as casas da direita possuem uma representação menor que a da esquerda. Na sequência, temos uma figura comparando os dois sistemas mostrando a diferença de valores de cada casa.

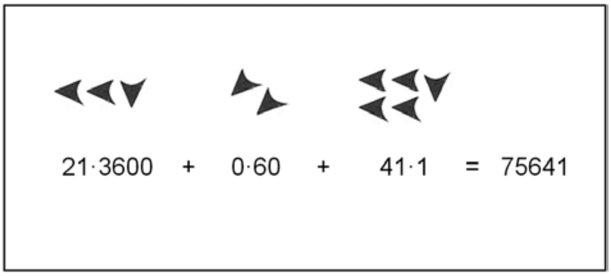
FIGURA 8 – COMPARAÇÃO ENTRE O SISTEMA NUMÉRICO MESOPOTÂMICO E O INDO-ARÁBICO



FONTE: O autor

A aplicação do zero neste sistema não era tão simples quanto na numeração atual ou na maia, pois este símbolo era empregado apenas para posições intermediárias, como veremos na próxima figura. Para escrever o 60, por exemplo, não se colocava o símbolo do zero na casa que representaria a quantidade de unidades. Simplesmente se marcava o algarismo 1 com uma espátula maior ou com uma incisão mais profunda no barro. Por vezes, esta incisão mais profunda poderia representar também $60^2 = 3600$, o que, dependendo do contexto, poderia causar alguma confusão. Por conta desta maneira de representação, muitos matemáticos e historiadores consideram este sistema como semiposicional.

FIGURA 9 – NÚMERO EM QUE APARECE O ALGARISMO ZERO MESOPOTÂMICO



FONTE: O autor

Apesar de tantos séculos, as influências deste sistema são encontradas ainda hoje. Por exemplo, uma hora é dividida em 60 minutos, um minuto é dividido em 60 segundos. Tem ainda o ângulo de uma volta que foi dividido em 360º, que é um múltiplo de 60. Cada grau é dividido em 60′ (60 minutos) e cada 1′ (1 minuto) é dividido em 60′′ (60 segundos). Acredita-se que estas unidades de medidas possuem esta característica, pois o 60 é um número que possui diversos divisores (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e o próprio 60). Neste formato, é muito mais fácil dividir uma hora em 3 partes iguais de 20 minutos. Caso uma hora tivesse "100 minutos", assim como o metro possui 100 centímetros, a divisão em três partes iguais terminaria em uma dízima periódica (1 m ÷ 3 = 3,33... cm).

NOTA

A palavra minuto é empregada como unidade de medida em duas grandezas diferentes, tempo e ângulo. Uma hora é dividida em 60 minutos, neste caso o minuto é uma unidade de medida de tempo e deve ser representada como 60min. Um ângulo de 1º (1 grau) também é dividido em 60 minutos e como é unidade de uma grandeza diferente é representado por 60′ (60 minutos). Nos dois casos 1 minuto é dividido em 60 segundos, para não gerar confusão, novamente representamos unidades de grandezas diferentes de formas diferentes: para tempo 1min = 60s e para ângulo 1′ = 60″. Então, quando você observar 30′ 45″, sabe que se trata de um ângulo e, se observar 30min 40s, está se falando de tempo.

Antes de desenvolverem o sistema sexagesimal, os mesopotâmicos utilizavam um sistema decimal primitivo, semelhante ao dos egípcios, que veremos no próximo tópico. Acredita-se que a mudança de sistema também tenha sido influenciada pela facilidade em efetuar divisões, pois, como vimos, 60 é um número que possui muitos divisores.

2.3 SISTEMAS NUMÉRICOS POSICIONAIS

Os dois sistemas numéricos que acabamos de estudar possuem em comum com o sistema atual o princípio posicional, em que um algarismo vale não apenas pelo seu valor, mas pela posição em que ele aparece na grafia do número. A utilização do zero também é algo característico do sistema posicional e que, apesar da distância geográfica e da separação cronológica, ocorre tanto nos dois sistemas estudados quanto no sistema utilizado atualmente.

Podemos observar que, apesar dos símbolos que representam os algarismos serem diferentes, o princípio matemático não muda de uma cultura para outra. A forma de representar o algarismo 4, por exemplo, pode ser diferente nestes sistemas, mas a ideia numérica que ele representa é a mesma. Pode-se mudar o sentido da grafia, da esquerda para a direita ou de cima para baixo, mas não altera a ideia de posição "casa", que é o que faz surgir o zero, um símbolo para uma casa vazia.

Isto nos permite compreender que a Matemática pode ser representada e interpretada de forma diferente, porém seus significados são os mesmos, independente da época ou local que ela ocorre.

A quantidade de algarismos varia nos sistemas estudados, e essa diferença pode ser mais significativa do ponto de vista matemático. Para efetuar uma multiplicação no nosso sistema, utilizamos uma tabuada para cada um dos dez algarismos, no sistema maia seria necessária uma tabuada para cada um dos vinte algarismos, e no mesopotâmico para cada um dos sessenta algarismos. Provavelmente, a grande quantidade de algarismos fez com que estes dois sistemas não despertassem o interesse de outros povos e caíssem em desuso com o passar dos séculos.

3 OS EGÍPCIOS

A terra dos faraós, das múmias e pirâmides fascina pela riqueza cultural que nos legou. Às margens do Rio Nilo, no nordeste do Continente Africano, o Egito atraiu a ocupação humana pelas condições de fertilidade do solo após as cheias anuais do rio. Desenvolvida há aproximadamente 5 mil anos, esta civilização tinha economia baseada na agricultura, controlada por um estado centralizado na figura do faraó, que detinha autoridade administrativa, judicial, militar e possuía caráter divino. A sociedade rigidamente hierárquica contava com grandes grupos de camponeses, artesãos e escravos.

As classes mais abastadas ocupavam lugar de destaque, pois exerciam funções importantes. É o caso dos engenheiros, que projetavam com grande destreza os gigantescos monumentos utilizados, como os túmulos no Egito: as imponentes pirâmides e esfinges. Os sacerdotes, que exercendo uma função sagrada, gozavam de mais prestígio, e fazendo uso de seus conhecimentos na área astronômica, reafirmavam sua importância na perpetuação da prática religiosa, conduzindo a fé politeísta da população. E ainda os escribas, que estudavam nas escolas do estado, dominavam a escrita e leitura dos hieróglifos, escrita desenvolvida no Egito e registrada em papéis feitos de papiro. Tinham a função de fiscalizar o trabalho, coletar impostos, medir e demarcar terras. Eram responsáveis pela contabilidade real e pelo registro dos atos dos faraós, servindo como fonte histórica aos dias atuais.

Para conseguir administrar toda essa complexa estrutura social e efetuar as marcações do calendário religioso e agrícola, baseado na astronomia, o cotidiano egípcio exigia uma forma de registro mais específica. Desenvolveram então uma numeração hieroglífica decimal, na qual cada símbolo (algarismo) representava uma potência de 10.

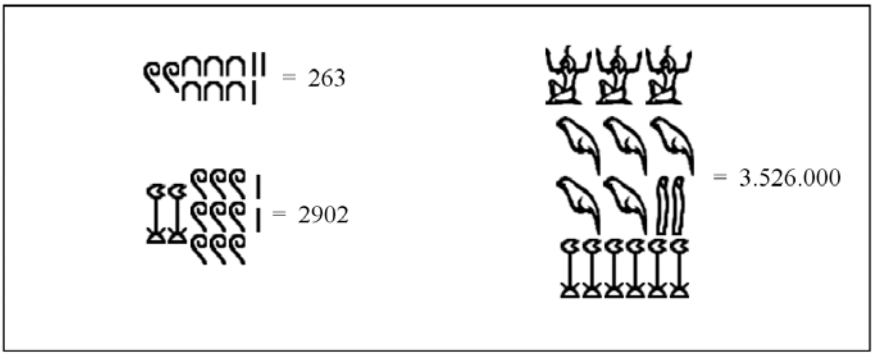
QUADRO 1 – ALGARISMOS EGÍPCIOS

Valor	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1 milhão, ou infinito
Hieróglifo						 ou 	
Descrição	Corda simples ou bastão	Calcanhar	Espiral de corda	Nenúfar (Nymphaeaceae)	Dedo Indicador	Girino, Sapo ou Peixe	Homem com as mãos erguidas

FONTE: Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Numerais_eg%C3%ADpcios>. Acesso em: 5 jul. 2010.

A justaposição aditiva destes símbolos formava os números desejados, este tipo de numeração dispensava a utilização de utilização de zero, por isso os egípcios nunca tiveram um símbolo para representá-los. Em um número, cada algarismo poderia ser repetido até nove vezes. Veja os seguintes exemplos:

FIGURA 10 – NÚMEROS NO SISTEMA EGÍPCIO



FONTE: O autor

Diversos livros de 6º ano, ou 5ª série, do Ensino Fundamental, trazem para os alunos o sistema de numeração egípcio, para que o aluno compreenda com mais facilidade os conceitos de unidade, dezena, centena, milhar e demais casas décimas. Por não ser um sistema posicional, mas, sim, um sistema aditivo, o aluno consegue compreender melhor a noção de quantidade que cada número representa.

Alguns professores poderão dizer que ensinar um sistema que há milênios não é mais utilizado é algo que apenas enche o plano de ensino e não agrega nada ao aluno. Realmente, ensinar a numeração egípcia apenas por ensinar não faz muito sentido, dificilmente utilizaremos o sistema de numeração egípcio no cotidiano. É por isso que os professores devem tomar cuidado para que o aluno faça a comparação com o sistema atual, facilitando o aprendizado do sistema decimal.

O sistema numérico egípcio, além de ser um dos primeiros a ser desenvolvido pelo homem, mostra aos alunos o método de registro numérico baseado na justaposição aditiva e não no sistema posicional, como o sistema atual. Este princípio esteve na origem de muitos outros sistemas, inclusive no sistema numérico romano que veremos a seguir.

4 OS ROMANOS

A história do maior império da Antiguidade Clássica está rodeada de lendas e mitos. Conta-se que os descendentes do herói troiano Eneias foram jogados no Rio Tibre por um tio ambicioso que desejava ser rei de Alba Longa. Os irmãos Rômulo e Remo sobreviveram ao ataque, sendo amamentados por uma loba. Mais tarde, resgatados por camponeses, fundaram a cidade de Roma, porém um desentendimento faz Rômulo matar Remo e tornar-se primeiro rei de Roma.

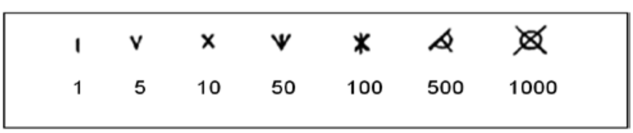
Pesquisas recentes afirmam que havia uma fortaleza construída pelos latinos e sabinos no curso sul do rio Tibre, entre as sete colinas no Lácio, centro da Península Itálica. O objetivo era evitar a invasão dos etruscos, mas, sem sucesso, os povos italiotas que ocupavam a região tiveram que se contentar em dividir com os etruscos o mérito de fundar Roma.

Os primeiros reis deixaram o local habitável, drenando pântanos, construindo muros, estradas e habitações mais resistentes. A sociedade era composta pela classe de patrícios (aristocratas), plebeus (pequenos agricultores, comerciantes), que era a maioria da população, clientes (sem propriedades, colocavam-se à disposição dos patrícios) e escravos (vencidos de guerra, endividados, pobres, criminosos).

Os últimos reis de Roma, que eram etruscos, foram depostos pela classe dos patrícios. Estes iniciam uma nova forma de governo difundida até a atualidade: a República. A organização da república estava amparada em uma grande máquina administrativa, com assembleias, senado e magistrados, todos eleitos pelos cidadãos, cada qual exercendo sua função. Nesse período Roma inicia sua ascensão meteórica. As guerras para expansão territorial levam a dominar todo o comércio do Mar Mediterrâneo. A população cresce vertiginosamente, principalmente devido aos escravos. A sociedade acompanha também o aparecimento de muitos problemas: desigualdade social, rebelião de escravos, colônias negando impostos, conflitos entre a plebe exigindo direitos e patrícios autoritários. Para contornar a crise, as leis romanas preveem um governo de emergência, nomeando um ditador. E a história do grande Império se arrasta ainda por meio século nas mãos dos generais, que inauguraram a política do "pão e circo" até sua completa falência em 476 d.C.

Apesar de os etruscos terem sido depostos para dar lugar à República, seu sistema de numeração continuou sendo utilizado, dando origem ao sistema numérico romano. Portanto, os algarismos romanos são descendentes diretos de antigos grafismos etruscos.

FIGURA 11 – ALGARISMOS ETRUSCOS

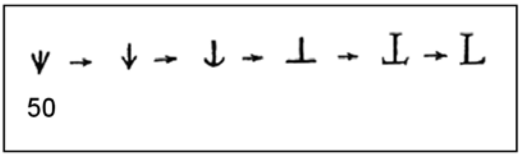


FONTE: Ifrah (1997, p. 397)

Devido à grande semelhança entre os algarismos 1, 5 e 10 do sistema etrusco com as letras latinas I, V e X, iniciou-se um sistema alfabético. Era muito mais conveniente escrever números utilizando letras do alfabeto latino do que ficar diferenciando símbolos tão parecidos. Os demais algarismos levaram mais tempo para assumirem sua forma alfabética, revelando um processo lento e natural.

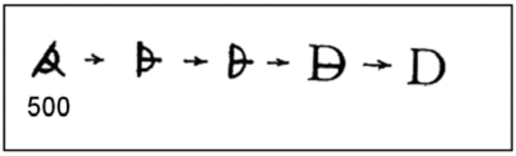
Observe nas figuras que seguem as transformações ocorridas nos símbolos originais ao longo do tempo até a forma alfabética:

FIGURA 12 – EVOLUÇÃO DO ALGARISMO L = 50



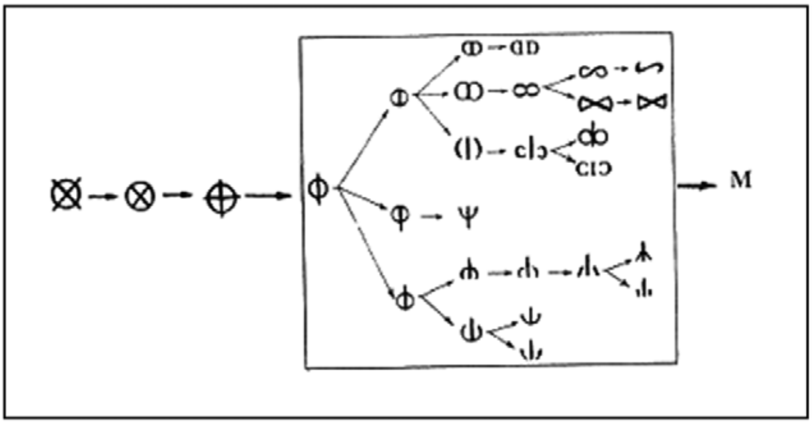
FONTE: Ifrah (1997, p. 397)

FIGURA 13 – EVOLUÇÃO DO ALGARISMO D = 500



FONTE: Ifrah (1997, p. 398)

FIGURA 14 – EVOLUÇÃO DO ALGARISMO M = 1000



FONTE: Ifrah (1997, p. 399)

> As mais antigas atestações conhecidas do uso das letras L, D e M, enquanto sinais de numeração, não remontam muito além do século I antes da era cristã. Que saibamos, a mais antiga inscrição romana, atribuindo a letra L para 50, data apenas de 44 a.C. Quanto à primeira menção conhecida do emprego das letras numerais M e D, figura na inscrição latina datada de 89 a.C., que dá o número 1500 sob forma MD (IFRAH, 1997, p. 397).

O único algarismo que não deriva da forma etrusca foi o C = 100. Este deriva da palavra latina *centum* (cem) que empresta a inicial para o algarismo. Após este processo, que levou alguns séculos e foi diferente para cada algarismo, chegamos ao formato que conhecemos hoje.

QUADRO 2 – ALGARISMOS ROMANOS

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

FONTE: O autor

Para escrever um número utilizando os algarismos romanos, utilizamos o princípio aditivo, semelhante aos egípcios, e o princípio subtrativo, desenvolvido pelos etruscos. Sua escrita obedecia a algumas regras:

- apenas os algarismos I, X e C podem ser repetidos, e não mais que 3 vezes;

- os algarismos I, X e C, quando escritos à esquerda de outro com valor maior, efetuam uma subtração neste último.

Veja alguns exemplos:

QUADRO 3 – NÚMEROS ROMANOS

2 = II 2	13 = XIII 10+3 = 13	87 = LXXXVIII 50+30+5+3 = 87
2010 = MMX 2000+10 = 2010	1772 = MDCCLXXII 1000+500+200+50+20+2 = 1772	555 = DLV 500+50+5 = 555
4 = IV 5–1 = 4	29 = XXIX 20+(10–1) = 29	94 = XCIV (100–10)+(5–1) = 94
939 = CMXXXIX (1000–100)+30+(10–1) = 939	499 = CDXCIX (500–100)+(100–10)+(10–1) = 499	1979 = MCMLXXIX 1000+(1000–100)+50+20+(10–1) = 1979

FONTE: O autor

O princípio subtrativo aplicado na escrita dos números romanos também foi absorvido do sistema etrusco. Este princípio, que no início serviu para reduzir a quantidade de algarismos na representação dos numerais, fez com que o sistema numérico romano perdesse toda e qualquer possibilidade de resolução de cálculos. Uma simples soma seria algo realmente difícil de realizar neste sistema. Para efetuar cálculos, os romanos recorriam a ábacos com fichas sobre mesas, denominados tábuas de cálculo ou mesas de cálculo. Registrar valores era a única função pertinente a este sistema, sendo inviável efetuar qualquer uma das quatro operações básicas.

O fato de ser não operatório fez com que este sistema, utilizado por um dos maiores impérios da Antiguidade, fosse completamente substituído no cotidiano pelo sistema indo-arábico, muito mais eficaz na resolução de cálculos envolvendo as quatro operações básicas. Todavia, antes de estudarmos a história do sistema numérico indo-arábico, leia o texto complementar sobre a origem do sistema etrusco. Ao analisarmos como um sistema pode evoluir ao longo da história, entendemos que a matemática é algo que faz parte da cultura de um povo e, assim sendo, está sujeita a influências de outras culturas. Desta forma, evolui com o passar dos séculos.

LEITURA COMPLEMENTAR

A ORIGEM DOS ALGARISMOS ROMANOS

Georges Ifrah

Essa questão, mesmo tendo permanecido obscura por muito tempo, não deixa, contudo, dúvida alguma: os sinais I, V e X são de longe os mais antigos da série. Anteriores a qualquer espécie de escrita (e, portanto, a qualquer alfabeto), esses algarismos e os valores correspondentes apresentam-se muito naturalmente ao espírito humano submetido a certas condições. Noutras palavras, os algarismos romanos e etruscos são verdadeiros fósseis pré-históricos; derivam diretamente da prática do entalhe, aritmética primitiva bem conhecida cujo princípio consiste em fazer entalhes num fragmento de osso ou num bastão de madeira, permitindo a qualquer um estabelecer uma correspondência biunívoca entre as coisas e enumerar e os traços destinados a representá-los.

Imaginemos um pastor que tem o hábito de registrar o número de seus animais seguindo esta técnica simples, provinda de tempos pré-históricos.

Operou, então, como seus predecessores o fizeram, sempre gravando sem interromper num bastão de osso ou de madeira, tantos entalhes quantas unidades há no número considerado. Esse procedimento não é, contudo, muito cômodo, já que obriga o pastor recontar o conjunto dos entalhes de seu bastão cada vez que se trata de reencontrar o número total de cabeças de seu rebanho.

O olho humano, é verdade, não é “um instrumento de medida” suficientemente preciso; seu poder de percepção imediato dos números não ultrapassa jamais o número quatro. Nosso homem pode, portanto, facilmente distinguir de uma só olhada (sem contar) um, dois, três, ou mesmo quatro entalhes paralelos. Mas aqui param suas faculdades naturais de identificação visual dos números, pois além de quatro entalhes, tudo se confunde no seu espírito e será necessário para ele apelar para o procedimento de contagem abstrato e, assim, conhecer seu número exato.

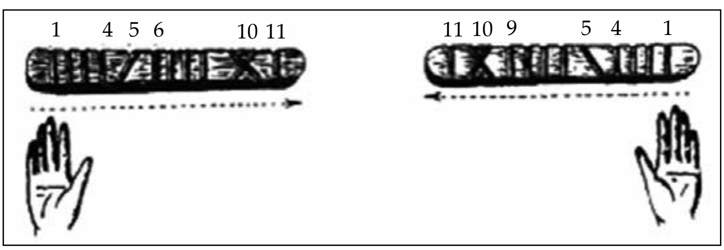
Nosso pastor, que sentiu essa dificuldade, toma consciência da falta de comodidade de seu sistema e procura, portanto, algum meio “ao seu alcance” para remediá-lo. Então, um dia, tem uma ideia.

Como antes, faz com que os animais passem um por um e grava um entalhe no seu bastão para cada animal que desfila diante dele, mas, uma vez que tenha marcado quatro traços semelhantes consecutivos, tem a ideia de modificar a confecção do quinto entalhe para que a série de traços permaneça reconhecível à primeira olhada. Com o número cinco, criou assim uma nova unidade de contagem que lhe é tanto mais familiar quanto ao correspondente de dedos de uma mão...

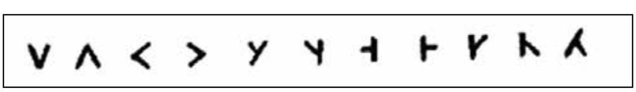
Para qualquer indivíduo, a gravura em osso ou em madeira apresentará as mesmas características e as mesmas dificuldades. Conduzirá, portanto, obrigatoriamente as mesmas soluções seja na África, Ásia, Oceania ou na América. Em qualquer latitude a imaginação criadora de sinais gráficos encontrar-se-á, então, limitada a essas condições.

Assim nosso pastor disporá, nessa circunstância, apenas de um número muito reduzido de possibilidades.

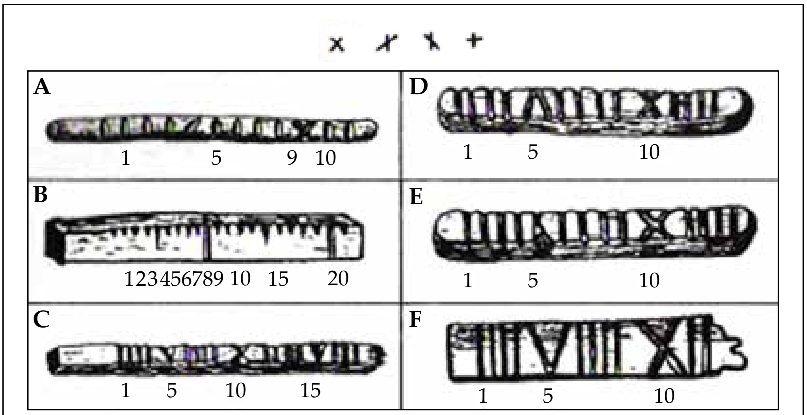
Para distinguir o quinto traço dos quatro precedentes, a primeira ideia que lhe vem ao espírito é que consiste em mudar simplesmente sua orientação. Inclina, portanto, fortemente esse traço em relação aos quatro primeiros e obtém uma representação gráfica que corresponde à posição do polegar em relação aos outros dedos.



Uma outra ideia consiste, por sua vez, em acrescentar ao quinto entalhe um pequeno traço suplementar (oblíquo ou horizontal), fazendo deste um verdadeiro sinal distintivo em forma de “T”, de “Y” ou de “V” diversamente orientado:



Retomando, em seguida, os quatro primeiros traços, o pastor prossegue a contagem de seus animais até o nono, mas, no décimo, encontra-se mais uma vez coagido a modificar a confecção do entalhe correspondente, para que a série dos traços permaneça ainda identificável à primeira olhada. E como se trata do número total de dedos das duas mãos reunidas, pensa, então, para tanto, numa marca evocando algo como “duplo” de uma das representações escolhidas para 5. É então que chega, em todos os casos de figuras, a um sinal de forma de “X” ou de cruz.



Todo utilizador da talha será conduzido a representar os números 1, 5, 10, 15 etc., de uma destas maneiras.

Cria, portanto, uma nova unidade numérica (a dezena) e a contagem em sua talha concorda doravante com a contagem digital elementar.

Retomando os entalhes simples, o pastor prossegue a contagem de seus animais até o décimo quarto, depois, para permitir ao olho distinguir o décimo quinto traço, dos quatorze precedentes, confere-lhe uma forma diferente, mas não cria novo símbolo; dá-lhe simplesmente a forma de algarismo “5”, já que se trata aqui de “uma mão depois de duas mãos reunidas”.

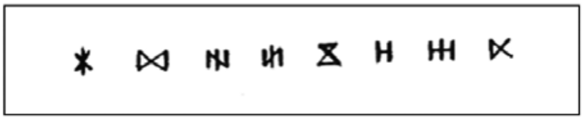
Opera, em seguida, da mesma maneira até 19, mas, desta vez, dá ao vigésimo traço uma forma idêntica ao algarismo da dezena.

Posteriormente, continua a contagem até o número 24, mediante a entalhes ordinários, e marca o vigésimo quinto número com algarismo 5. Procede assim até 9 + 4 x 1 0 = 49.

Então se encontra na obrigação de imaginar um novo sinal particular para marcar a cinquentena, pois não poderia reconhecer visualmente uma sequência comportando mais de quatro sinais representando a dezena. E é muito naturalmente que chega, assim, a um dos sinais seguintes (acrescentando simplesmente um traço ou uma das representações de 5).

Depois disso, nosso homem prossegue a enumeração das cabeças de seu rebanho e, operando como anteriormente, atinge todos os números compreendidos entre 50 e 50 + 49 = 99.

Na centena sente a mesma necessidade de introduzir uma outra notação particular. E é ainda muito naturalmente que chega a um dos grafismos seguintes (acrescentando um ou dois traços a uma das representações de 10, ou ainda, tomando o "duplo" de um dos algarismos para 50).



Depois, como ocorreu mais acima, prossegue a contagem até 100 + 49 = 149. Para o número seguinte, retoma o sinal da cinquentena e continua da mesma maneira até 150 + 49 = 199.

Em 200, retoma desta vez o algarismo de centena e continua sua numeração até 200 + 49 = 249. E assim por diante até 99 + 4 x 100 = 499.

Introduz, em seguida, um novo sinal para 500 e continua a contar até 500 + 499 = 999. Depois um outro sinal para 1.000, que lhe permitirá considerar os números até 4.999 (= 999 + 4 x 1.000) etc.

Assim, estando na incapacidade de reconhecer visualmente uma série de mais de quatro sinais análogos, esse pastor, graças ao tamanho assim concebido, chegará a discernir bem facilmente quantidades, tais como 50, 100, 500 ou 1.000, sem, para isso, contar todas as unidades. E se, por razões puramente materiais, o bastão empregado a partir da unidade não permitisse atingir um desses números, bastar-lhe-ia confeccionar tantas talhas quantas fossem necessárias.

A talha assim estruturada dá a seus utilizadores a possibilidade de elevar-se a números relativamente grandes, praticamente a todos os necessários, sem que tenham de considerar sequência de mais de quatro algarismos de uma mesma categoria. Na circunstância, esta age, por assim dizer, como uma *alavanca,* esse outro instrumento que confere a seus utilizadores a possibilidade de levantar fardos cujo peso ultrapassa, de longe, suas próprias capacidades físicas.

Define, ademais, uma verdadeira numeração escrita que dá um algarismo particular a cada um dos termos da série:

1
5
10 = 5 x 2
50 = 5 x 2 x 5
100 = 5 x 2 x 5 x 2
500 = 5 x 2 x 5 x 2 x 5
1000 = 5 x 2 x 5 x 2 x 5 x 2
5000 = 5 x 2 x 5 x 2 x 5 x 2 x 5

Ela dá, portanto, nascimento a um sistema decimal que faz o número 5 desempenhar o papel de uma base auxiliar (e aos números 2 e 5 o de duas bases alternadas) e cujas ordens de unidade consecutivas são exatamente os da numeração romana. E, como vimos, engendra também grafismo inteiramente comparáveis aos dos algarismos arcaicos ou etruscos.

Ora, o emprego simultâneo do princípio aditivo e do princípio subtrativo nas numerações etruscas e romana constituiu igualmente uma reminiscência dessa velha prática.

Retornemos ao nosso pastor que, após ter enumerado seus animais e tê-los recenseado, segundo diversas categorias, deseja agora transcrever numa prancheta de madeira o resultado desta *contagem*. Chegando ao número 144, seus animais se repartem como se segue:

26 vacas leiteiras
35 vacas estéreis
39 bois
44 touros.

Para indicar um desses números, o de seus bois, por exemplo, a primeira ideia que lhe vem ao espírito consiste em marcá-lo, "recopiando" simplesmente os traços consecutivos que figuram o bastão:

IIII	V	IIII X	IIII V	IIII X	IIII V	IIII X	IIII V	IIII
1	5	10	15	20	25	30	35	39

Percebe, então, rapidamente que tal *notação cardinal* é por demais fastidiosa, já que faz intervir o conjunto das unidades sucessivas de cada número considerado.

Para contornar a dificuldade, pensa, então, numa representação de tipo *ordinal*, bem mais cômoda e mais abreviada do que a precedente.

Para os números de 1 a 4, adota uma notação cardinal notando sucessivamente assim:

I   II   III   IIII

Não pode fazer de outro modo, pois para indicar, por exemplo, que um traço é o terceiro da série, deve marcar dois traços diante dele, para que o lugar que ocupa apareça efetivamente como o terceiro.

No entanto, não ocorre o mesmo com o número 5, representado por uma forma particular, a de um "V", por exemplo, que serve precisamente para distinguir o quinto traço dos quatro precedentes. Assim esse "V" basta a si mesmo e dispensa transcrever os quatro traços que se encontram gravados diante dele na talha; em lugar de indicar esse número pela notação IIIIV, basta, portanto, escrever V.

Desde então, o número 6 (um traço depois do V) é transcrito simplesmente VI (e não mais IIIIVI), o número 7 (dois traços depois do V: VII e assim por diante até VIIII (9).

Por sua vez, o sinal em forma de "X" representa sozinho o décimo traço da série e torna, portanto, inútil à indicação dos nove sinais que o precedem. Segundo o mesmo princípio, escrevem-se os números 11, 12, 13 e 14 sob as forma XI, XII, XIII e XIIII (e não mais IIIIVIIIIXI etc). E o número 15 (que corresponde ao V em seguida do X) é notado simplesmente XV (e não mais (IIIIVIIIIXIIIIV, nem XIIIIV), cada " X" apagando, assim, os nove traços que o precedem e o último "V" os quatro traços imediatamente diante dele. Para os números de 16 até 19, escreve-se igualmente XVI, XVII, XVIII, XVIIII. Depois, para o número 20 (que corresponde ao décimo "X" da série), nota-se XX. E assim por diante.

Depois de ter feito a contagem de seus animais mediante entalhes de seu bastão, transcreve agora sua contagem escrevendo isso sobre uma prancheta de madeira:

XXVI	(=26) para as vacas leiteiras
XXXV	(=35) para as vacas estéreis
XXXVIIII	(=39) para os bois.
XXXXIIII	(=44) para os touros.

Todavia, no afã de abreviação, nosso pastor imagina também um outro princípio. Em lugar de escrever o número 4 com quatro traços, nota-o sob a forma de IV, exprimindo assim que o quarto traço da série encontra-se exatamente diante do "V": IIII →(III)IV → IV. Dessa maneira, faz-se a economia de dois símbolos. Igualmente, em lugar de escrever o número 9 sob a forma VIIII, nota-o IX, exprimindo assim que o nono traço da série encontra-se exatamente antes de "X" no bastão talhado: IIIIVIIII → (IIIIVIII)IX → IX. Dessa maneira faz a economia de três símbolos.

Representa em seguida, da mesma forma os números 14, 19, 24...

Assim se explica o emprego, nas numerações romana e etrusca, das formas IV, IX, XIV, XIX etc. ao lado de IIII, VIIII, XIIII, XVIIII...

Concebe-se, portanto, que os povos, usando desde há muito a técnica de entalhe, tenham chegado ao longo da História, independentemente de qualquer influência latina ou etrusca, a notações gráfica e matematicamente equivalentes as dos etruscos e romanos. A hipótese parece tão evidente que se poderia admiti-la mesmo na ausência de qualquer prova, mas os testemunhos existem e são muito numerosos.

FONTE: Ifrah (1997, p. 404-409)

RESUMO DO TÓPICO 2

Neste tópico você acompanhou:

- A civilização maia, habitante da América Central, desenvolveu escrita, um sistema vigesimal de numeração e criou o zero.

- Na Mesopotâmia, hoje Iraque, foi desenvolvida uma escrita peculiar em tábuas de argila denominada cuneiforme. Sua numeração segue a mesma prática de marcar o barro em um sistema semiposicional. Também utilizavam o zero.

- Aprendemos que o sistema posicional faz com que o número não tenha apenas um valor atribuído a ele, mas que isso depende de onde está colocado.

- Os egípcios tinham uma sociedade muito complexa, possuíam a escrita hieroglífica em papiros e desenvolveram o sistema de numeração por justaposição aditiva, no qual os símbolos de representação dos números poderiam ser repetidos até noves vezes, o que facilitava a noção de quantidade.

- Os romanos foram profundamente influenciados pelos grafismos etruscos, que usavam o princípio aditivo e subtrativo dos egípcios em letras que simbolizavam os números.

AUTOATIVIDADE

Com base na leitura deste tópico, responda às questões:

1 Quais as semelhanças entre maias e mesopotâmicos no que diz respeito à criação de sistema numérico?

2 Que nome é dado à escrita desenvolvida na Mesopotâmia?

3 Explique o sistema semiposicional utilizado na representação matemática dos mesopotâmicos.

4 O Egito exerce um grande fascínio sobre as pessoas por seu desenvolvimento esplendoroso. Desvendar o cotidiano deste povo e conhecer um pouco mais sobre uma civilização de mais de 5 mil anos só foi possível devido aos registros deixados por eles. Como era feito esse registro? Cite a escrita e os materiais utilizados nesta tarefa.

5 Por qual motivo os egípcios não utilizavam o zero?

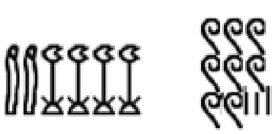
6 Qual a diferença do sistema numérico posicional e o sistema numérico de justaposição aditiva?

7 Por qual motivo a realização de cálculos no sistema numérico dos romanos se tornou difícil? Como tentaram sanar essa dificuldade?

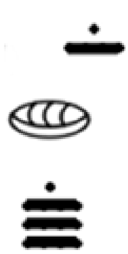
8 Qual povo influenciou profundamente o sistema numérico romano?

9 Observe os números a seguir, identifique qual povo os utilizou e converta-os para o sistema indo-arábico:

a) MMCDXXXIV

b) 

c) 

d) 

TÓPICO 3

O NOSSO SISTEMA

1 INTRODUÇÃO

Geralmente admite-se que os algarismos e o sistema numérico usado em nossa vida cotidiana têm sua origem relativamente recente. Era enorme o número de sistemas de numeração empregados antes da era cristã, assim como o empregado na linguagem escrita. Contudo, a que povo deve ser atribuída a honra pela descoberta tão importante da numeração moderna? Quem foram os responsáveis para que pudéssemos ter nosso sistema de numeração de uma forma simplificada e compreensível em todo o mundo?

Segundo historiadores do início do século XX, ela se deve aos antigos matemáticos gregos. Os helenos empregaram apenas duas espécies de notação numérica durante a antiguidade. Uma que era matematicamente equivalente à dos romanos, e a outra do tipo alfabético, como a dos judeus e nenhuma delas usava o zero.

Os matemáticos gregos eram extremamente talentosos e certamente teriam adotado o zero, se a descoberta tivesse acontecido ali. Este povo deixou poucos registros sobre suas técnicas operatórias, mas se sabe que chegaram a fazer cálculos bem complexos.

Do porto de Alexandria, o sistema numérico teria sido levado a Roma, na época do império e, mais tarde, para o Oriente Bem Próximo e para a Índia. Através do comércio chegou aos árabes.

2 DA ÍNDIA PARA O ISLÃ

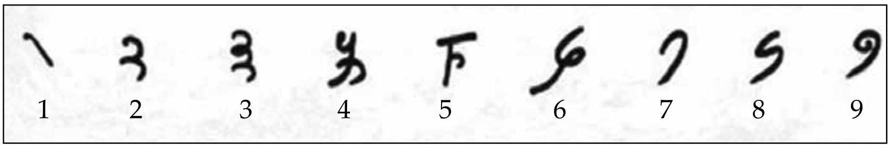
Os hindus utilizavam seixos ou fichas sobre ábacos, um certo tipo de mesa na qual colunas previamente traçadas separavam todas as ordens decimais. Ao contrário dos gregos, eram sábios que tinham o espírito voltado para as aplicações, tendo sido animados por uma espécie de paixão pelos grandes números e pelo cálculo numérico.

Por volta do século V da nossa era, no norte da Índia, nasce o ancestral de nosso sistema de numeração decimal, estabelecendo, assim, as bases do cálculo escrito, exatamente como é praticado hoje.

Como mostram inúmeras inscrições desde o século III a.C., os habitantes da Índia setentrional tinham usado durante muito tempo uma numeração muito rudimentar. Esta antiga numeração trazia características do nosso sistema moderno.

Seus nove primeiros algarismos, os que representavam as unidades simples, eram, de fato, signos independentes de qualquer intuição sensível. Assim, o algarismo 9, por exemplo, não era mais representado por nove riscos ou nove pontos, mas, sim, por um grafismo convencional.

FIGURA 15 – ANTIGA NUMERAÇÃO HINDU



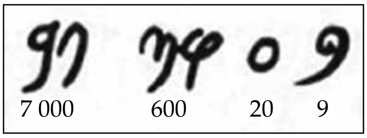
FONTE: Ifrah (2001, p. 265)

Além do mais, já possuíam uma grafia semelhante aos nove algarismos distintos significativos atuais. Desses signos nasceriam mais tarde os atuais e erroneamente denominados "algarismos arábicos".

Nesta época, os algarismos ainda não eram submetidos ao sistema posicional, consequentemente, não eram operacionais como os nossos. Utilizando-se da base decimal, esta numeração repousava no princípio de adição e atribuía um algarismo especial a cada um dos números.

Para representar um número como 7.629, era necessário justapor, nesta ordem, os algarismos "7000", "600", "20" e "9".

FIGURA 16 – O NÚMERO 7.629



FONTE: Ifrah (2001, p. 266)

Como a dificuldade estava em representar números muito grandes, a solução foi representá-los por extenso. Iniciava-se a trajetória para a descoberta dos princípios posicionais e o zero. Apesar de se tratar de um sistema oral, ele foi considerado de alta qualidade. No início, atribuía-se um nome particular a cada um dos nove primeiros números inteiros.

FIGURA 17 – SONORIZAÇÃO DOS ALGARISMOS HINDUS

eka	dvi	tri	catur	pañca	sat	sapta	asta	nava
1	2	3	4	5	6	7	8	9

FONTE: Ifrah (2001, p. 267)

Regida pela base dez, acrescentava-se em seguida um nome particular à dezena e a cada uma de suas potências, além de nomes compostos a todos os outros números.

> Os sábios hindus se acostumaram, a partir do século IV d.C., a exprimir os números na ordem das potências ascendentes de sua base, começando pelas unidades simples correspondentes. Quando observamos a nossa numeração oral atual, os números 10.000, 100.000, 10.000.000, 100.000.000 representam as bases auxiliares (IFRAH, 2001, p. 267).

O sistema falado dos sábios hindus não privilegiava nenhum número, desta forma, para representar determinado número, bastava colocar o nome indicador da dezena (*dasa*) entre o das unidades simples e das unidades de segunda ordem; o nome indicador da centena (*sata*) entre o das unidades de segunda e terceira ordens, e assim sucessivamente.

Com a finalidade de abreviar a notação numérica utilizada, os matemáticos e astrônomos hindus dessa época conseguiram superar mais uma importante etapa. Do enunciado de cada número retiraram apenas a sucessão dos nomes das unidades correspondentes, respeitando a ordem de sequência regular, conformando-se no sentido da leitura de acordo com as potências crescentes de 10. Assim, o número 7.629 passou a ser expresso por um enunciado do gênero **NOVE. DOIS. SEIS. SETE (= 9 + 2 x 10 + 6 x 100 + 7 x 1.000)**.

Realizando essa simplificação, os hindus desenvolveram uma verdadeira numeração oral e posicional. Desta forma, aparecem pela primeira vez, os nomes em sânscrito das nove unidades simples, um valor variável que depende de sua posição na enumeração do número.

Quando diziam – "Um, Um", eles atribuíam um valor de dezena ao segundo Um. Este fato é merecedor de muita admiração, pois os matemáticos hindus foram os únicos a inventarem uma numeração oral estritamente baseada na posição de cada algarismo. Esse progresso logo determinaria um outro de maior ou igual importância: o surgimento do zero.

2.1 O ZERO INDIANO

Os hindus, apesar de desenvolverem um sistema capaz de representar grandes números, perceberam uma lacuna ao terem a necessidade de representarem o vazio. A expressão do número 321 era (um, dois, três), porém a representação do número 301 (um, três) não expressava o decimal, dando conotação errada ao número.

Quando se aplica o princípio de posição aos nomes das nove unidades simples, é necessário que seja utilizado um vocabulário especial que serve para marcar a ausência das unidades de uma determinada casa. Os estudiosos hindus contornavam essa situação recorrendo a uma palavra *s´unya*, cujo significado é vazio. Então o número 301 foi representado por – *eka s´unya tri* (UM. VAZIO. TRÊS).

Solucionado o problema, não havia mais a possibilidade de ocorrer equívoco. Depois dos babilônios, e talvez ao mesmo tempo em que os maias, os hindus acabaram também inventando o zero.

Os sábios hindus haviam descoberto, há algumas gerações, o princípio de posição e o zero. Para exprimirem oralmente ou por escrito o resultado de uma operação, eles haviam se acostumado a dizer ou anotar o seguinte: 9.100 "ATMOSFERA (0). VAZIO (0). LUA (1). ORIFÍCIOS (9)".

A sociedade hindu estava organizada em castas, grupos compostos de pessoas que exercem as mesmas profissões. Havia originariamente quatro castas: **Brâmanes** (sacerdotes), **Xárias** (guerreiros e nobres), **Vaixás** (comerciantes), **Sudras** (trabalhadores) e, abaixo destes, havia ainda os **párias** (intocáveis), sem direitos e excluídos do convício social. Com o tempo, estas castas foram se subdividindo, porém a imobilidade continuava rígida.

Assim, no século VIII, os árabes invadiram parte do território indiano, levando consigo o islamismo, e tiveram uma receptividade incomum por parte dos indianos invadidos. A explicação era simples, os ensinamentos de Maomé pregam a igualdade das pessoas perante Deus, e o povo indiano vislumbrou na conversão ao islamismo uma forma de escapar da desigualdade imposta pelas castas.

Os árabes mostravam muito interesse também pelas culturas orientais. Quanto aos números, primeiro eles se interessaram pelas numerações alfabéticas grega e judaica. Através dos gregos e dos cristãos da Síria e da Mesopotâmia, eles conseguiram recuperar o sistema sexagesimal posicional e o zero dos antigos sábios babilônios. Eles os adaptaram para que fossem utilizados em suas tábuas astronômicas e na sua escrita.

No entanto, quando o acesso às descobertas hindus chegou, foi como se uma nova porta se abrisse. Devido às boas relações comerciais com a Índia pelo Golfo Pérsico, os árabes puderam se iniciar na astronomia, na aritmética e na álgebra dos sábios hindus.

No final do século VIII, os árabes adotam o sistema numérico hindu, os números, a numeração decimal de posição, o zero e os métodos de cálculo.

Um entusiasmado autor de uma obra árabe da época atribuiu ao novo sistema um ditado – "é o método mais resumido e prático, mais fácil de entender e mais cômodo de aprender. Ele comprova, sem dúvida, um espírito penetrante, num belo talento criador e a superioridade de discernimento e de gênio inventivo dos hindus" (IFRAH, 2001, p. 297).

Surgem os nove algarismos da numeração indo-arábica, recebendo um valor que variava em sua posição nas representações numéricas. Quanto ao zero, este ficou simbolizado por um ponto ou por um pequeno círculo. Nasce, assim, o zero dos tempos modernos.

Desta vez, a escrita das unidades das diferentes ordens decimais não foi escrita na forma de potência de 10. Ao invés de começar pelas unidades simples, os números foram representados da direita para a esquerda, exatamente de comum acordo com as potências decrescentes de 10, a partir do número associado às unidades de ordem mais elevadas. Especialistas nesta área, eles conseguiram simplificar suas regras, aperfeiçoando-as continuamente, antes que se lançassem séculos mais tarde às próprias bases de nossos cálculos escritos atuais.

FIGURA 18 – OS ALGARISMOS E A IMPRENSA DESDE O SÉCULO XV

FONTE: Ifrah (1997, p. 477)

3 DOS ÁRABES PARA OS EUROPEUS

No mesmo período em que os árabes muçulmanos invadem a Índia, sua expansão também se volta para o ocidente. Tomam o norte da África, fundando os califados da Tunísia, Marrocos e Egito, e ainda atravessando o estreito de Gibraltar, alcançam a Europa, fundando na Península Ibérica o Califado de Córdoba. A principal característica das sociedades muçulmanas são a vida urbana e as atividades mercantis, marcadas por desenvolvimento de grandes centros de comércio. As rotas de comércio árabe iam e vinham do Oriente para o Ocidente, promovendo uma integração dos elementos culturais destes povos.

O ponto primordial da expansão árabe muçulmana foi a tolerância e a integração. Dos povos dominados, exigia-se o reconhecimento da supremacia islâmica e pagamento de tributos, mas não obrigavam à conversão. Agregavam, ainda, os conhecimentos dos dominados, transcrevendo, traduzindo e estudando sua produção cultural, promovendo uma verdadeira integração científica.

Devemos atribuir uma grande admiração aos sábios árabes que, sem o menor constrangimento, reconheceram a superioridade da descoberta feita por sábios estrangeiros, de forma a realizarem adaptações para sua própria cultura.

Os árabes trouxeram para a nossa ciência uma vida nova e um caráter original. Suas conquistas e seu desejo de mudança fizeram com que fosse atribuída ao sistema hindu uma dimensão universal, propagando esta renovação intelectual, científica e tecnológica também ao mundo ocidental. Dotados de um imenso espírito de síntese, os árabes conseguiram aliar o rigor da sistematização dos matemáticos e filósofos gregos com a prática da ciência hindu. Isto fez com que o progresso chegasse à aritmética, à álgebra, à geometria, à trigonometria e à astronomia.

Dentre os grandes matemáticos que nasceram com a civilização arábico-islâmica, na época de sua idade de ouro, não podemos esquecer-nos de Mohammed Ibn Mussa Al-Khowarizmi, que viveu mais ou menos entre os anos 780-850 d.C. Ele era bibliotecário da corte do califa Abássidaal-Ma'mun, pouco tempo depois do governo de Carlos Magno.

FIGURA 19 – O GRANDE SÁBIO MUÇULMANO AL-KHOWARIZMI

FONTE: Ifrah (1997, p. 368)

A este sábio podem-se atribuir duas grandes obras, que abriram portas para a vulgarização dos métodos de cálculo e do procedimento algébrico, vindos da civilização hindu, difundidos primeiro na civilização árabe e, depois, no Ocidente Cristão.

Al Khowarismi proporcionou duas grandes contribuições, sendo a Aritmética a primeira, que ficou conhecida graças a uma tradução latina, pois infelizmente o original foi perdido. No primeiro livro árabe conhecido, a numeração decimal posicional e os métodos de cálculo de origem hindu merecem exemplos bem detalhados.

O nome Al-Khowarizmi transformou-se de fato em *alchoarismi*, logo depois virou *algorismi*, *algorismus*, *algorismo* e, por fim, ficou algoritmo. Durante muito tempo, este termo serviu para designar na Europa o cálculo por escrito inventado pelos árabes, antes que adquirisse a acepção mais ampla de hoje.

A segunda contribuição de Al-Khowarizmi foi, por outro lado, consagrada pela ciência algébrica e ficou conhecida de tal forma que hoje nossa álgebra moderna recebe esse nome em homenagem a ele. A obra foi intitulada por uma palavra árabe que designava uma das operações preliminares para a resolução inicial de qualquer equação. A palavra era pronunciada como *aljabr* e foi traduzida em latim por álgebra.

O nascimento dos algarismos arábicos se deu com o império arábico-muçulmano muito cedo, no século IX. O norte da África e a Espanha já não faziam mais parte do califado de Bagdá, mas, mesmo assim, as relações entre os povos não foram rompidas, principalmente por conta da peregrinação a Meca, do intercâmbio comercial, das guerras, das migrações de populações e das idas e vindas de inúmeros viajantes.

Assim que ficou conhecida pelos árabes, a aritmética hindu ganhou rapidamente todos os países irmãos do Magreb e da Espanha, pois, até então, os matemáticos árabes ocidentais serviram-se de métodos muito arcaicos. Na metade do século IX, eles se tornaram especialistas nos cálculos na areia, passando a manejar números muito grandes com mais facilidade.

Com a passagem dos séculos, os algarismos evoluíram e assumiram, pouco a pouco, um aspecto mais particular diferente da grafia hindu de seus primos do Oriente Próximo.

FIGURA 20 – O NASCIMENTO DOS ALGARISMOS ARÁBICOS

FONTE: Ifrah (2001, p. 302)

"Os cristãos da Europa tiveram muita dificuldade para aceitar os novos algarismos. Eles se mostraram tão reticentes diante da novidade que foram necessários séculos até que ela pudesse triunfar" (IFRAH, 2001, p. 302).

A Europa vivia um clima conturbado nesse momento da história. A queda do Império Romano no século V deu lugar a vários reinos dos povos germânicos que, convertidos ao cristianismo, imprimiram ao ocidente europeu uma organização rural, baseada na tradição oral e economia agropastoril.

O avanço do islã na Europa, com ocupação na Península Ibérica, estimulou ainda mais a ruralização que caracterizou a sociedade europeia durante a Idade Média.

As relações feudais não demonstravam preocupação com a cultura, e com isso não se importavam em guardar tesouros antigos que ainda existiam, com exceção da corte de Carlos Magno, do Reino Franco, que incentivou a tradução de textos gregos e romanos por monges copistas e criou escolas destinadas à alfabetização dos jovens da nobreza e também voltadas à formação de padres.

A mais rica biblioteca da antiguidade, a célebre biblioteca de Alexandria, foi pilhada e destruída duas vezes – a primeira vez, no século IV, por vândalos cristãos, e a segunda, por muçulmanos fanáticos do século VII. Muitos manuscritos originais desapareceram e inúmeras obras-primas da literatura e ciência grega também seriam perdidas se já não tivessem sido recolhidas e traduzidas.

O acesso à instrução na Europa era limitado, primeiramente aprendiam apenas a ler e a escrever. Depois aprendiam a gramática, a dialética, a retórica e, muitas vezes, a teoria musical. Sobre astronomia e geometria, o conhecimento que recebiam era bastante sumário, ao mesmo tempo ensinavam a contar nos dedos e a escrever e ler os algarismos romanos. Todavia, esses ensinamentos eram destinados a filhos de nobres e pessoas que frequentavam mosteiros para formação episcopal.

As práticas das operações aritméticas, mesmo as mais elementares na época, não estavam ao alcance de qualquer um. Apenas uma pequena massa privilegiada de especialistas, que havia estudado longos anos, tinha chegado ao uso de ábacos romanos.

No entanto, essa estagnação cultural tem os dias contados. As necessidades econômicas e o contato com o Oriente após as Cruzadas (movimento cristão para libertação da cidade de Jerusalém do domínio muçulmano) fizeram com que a Europa mergulhasse em um desenvolvimento do comércio, que veio acompanhado do florescimento urbano e, consequentemente, do Renascimento Cultural.

Nesta época, a Europa voltou a existir, renovada nas artes e na ciência. As cidades voltaram a florescer. Espíritos abençoados, como Abelardo e Santo Tomás de Aquino, introduzem as ideias da Lógica de Aristóteles, e assim origina-se a Escolástica.

NOTA

Segundo o dicionário Aurélio, Escolástica é o conjunto de doutrinas teológico-filosóficas da Idade Média, caracterizadas, sobretudo, pelo problema da relação entre a fé e a razão.

Este período é conhecido na história sob a denominação de Renascimento Europeu. Aparecem grandes universidades na Europa Ocidental, renasce o conhecimento da Antiguidade Clássica Greco-Romana, e a busca do saber é marcada pelo uso da razão.

Esta aurora intensificou-se no tempo do rei Ricardo Coração de Leão. Reconquistar a ciência e a cultura não era o objetivo das Cruzadas, mas foi o que resultou destas guerras.

Foi graças aos inúmeros intercâmbios com a cultura muçulmana que parte do clero das Cruzadas aprendeu o cálculo ao modo de Al-Khowarizmi, isto é, desenhando os números na areia, sem recorrer às colunas dos ábacos de poeira. E, assim, acabavam de surgir nas próprias portas de Jerusalém os primeiros “algoristas” europeus, e os abacistas foram obrigados a adotar o zero no caso de uma unidade em falta.

No final do século XI, a atividade de tradutores e de copistas de obras árabes, gregas ou hindus floresceu na Espanha. Os contatos culturais entre os mundos passaram a ser cada vez mais frequentes. Havia um vago número de europeus desejosos de aprender Matemática, Astronomia, Ciências Naturais e Filosóficas.

Lentamente, ao longo dos séculos XII e XIII, as obras de Euclides, Ptolomeu, Aristóteles, Al-khowarizmi, Al-Biruni, entre outros, vão se tornando conhecidas. Neste período, foi a vez dos cristãos traduzirem para o latim tudo o que lhes chegava às mãos. Chegou o momento da condenação à morte do abacismo.

No início do século XIII, o movimento da nova escrita é acentuado, graças à influência de um grande matemático italiano, chamado Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci. Ele visitou a África muçulmana e conheceu o Oriente Próximo. Ali encontrou mestres árabes, que lhe explicaram a fundo o sistema numérico utilizado por eles, bem como as regras do cálculo algébrico e os próprios princípios geométricos fundamentais.

NOTA

O apelido Fibonacci lhe foi atribuído por ser filho de Bonacci, um conhecido industriário da cidade de Pisa na Itália.

Em 1202, Fibonacci redige um admirável tratado que mais tarde viria a ser transformado em uma espécie de defensor do "algorismo", de modo a contribuir muito para o desenvolvimento algébrico.

A partir do século XV, estabelece-se uma série de confusões entre os vários sentidos assumidos pela palavra algarismo. Para alguns, algarismo significava "signo de numeração", já para outros o significado era "nada". Os sábios tentavam em vão impor o significado correto e original, mas acabaram por se inclinar sob a pressão popular e decidiram em debate que significaria "nulidade" o primo italiano zero.

Hoje, quando nos referimos à palavra "algarismo", vemos que a própria palavra, cujo sentido usado é figurado, remete-nos à época conturbada da história europeia, afinal, ela significa uma "escrita secreta".

Mesmo com a vitória do novo cálculo, foi necessária a Revolução Francesa para que o cálculo por meio dos algarismos se tornasse claro. É a partir daí que o cálculo e a ciência moderna podem se desenvolver sem entraves.

FIGURA 21 – LEONARDO DE PISA, CONHECIDO COMO FIBONACCI

FONTE: Garbi (1997, p. 28)

RESUMO DO TÓPICO 3

Neste tópico vimos que:

- Os habitantes da Índia usavam um sistema numérico com grafismos convencionais específicos para os nove primeiros algarismos.

- O problema de representar números grandes faz os hindus desenvolverem o sistema posicional e o zero.

- A sociedade indiana, baseada em castas, recebe a dominação árabe muçulmana como libertação de sua imobilidade e promove uma grande troca cultural.

- Surgem os nove algarismos da numeração indo-arábica, recebendo um valor que variava em sua posição nas representações numéricas. O zero passa a ter um símbolo que variava entre um ponto ou um pequeno círculo.

- Os árabes, com seu espírito de síntese, conseguiram aliar o rigor da sistematização dos matemáticos e filósofos gregos com a prática da ciência hindu.

- A grande admiração dos árabes pelas ciências, incentivando a tradução, cópia e estudo de descobertas feito por sábios estrangeiros, provocaram adaptações para sua cultura.

- Os movimentos cruzadistas fazem um intercâmbio entre o Oriente Islâmico e o Ocidente Cristão na Europa Medieval.

- O renascimento cultural europeu faz o continente superar a estagnação científica, buscando através da razão novos conceitos na Matemática, Filosofia, Astronomia e Ciências Naturais.

- A Matemática tem como aliado nesse processo que movimenta a Europa o estudioso italiano Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci.

AUTOATIVIDADE

1 Quais as características do antigo sistema de numeração decimal desenvolvido na Índia a partir do século IV d.C.?

2 Como era caracterizada a sociedade indiana naquele período?

3 Por qual motivo os hindus sentiram a necessidade de criar o zero? Como o representaram?

4 Explique como foi a integração cultural entre indianos e árabes.

5 Quais as contribuições do sábio muçulmano Mohammed Ibn Mussa al-Khowarizmi para a Matemática?

6 Quem foi o grande difusor da Álgebra na Europa Ocidental durante o Renascimento?

7 Quais fatores propiciaram o Renascimento europeu? Cite sua característica marcante.

8 Diferencie o algorismo do abacismo.

TÓPICO 4

ATUALIDADES

1 INTRODUÇÃO

Com o avanço da ciência e o surgimento de novas tecnologias, o homem chega a um nível de desenvolvimento jamais visto neste planeta. Após séculos de seguidos avanços científicos, o desenvolvimento humano culmina em uma máquina que, em menos de um século após seu surgimento, alcançou magnitudes globais e revolucionou a comunicação, o comércio, a produção científica, cultural, industrial e agrícola. Estamos falando do computador.

Após mudar o dia a dia das pessoas e aproximar diversas partes do mundo através da internet, o computador influencia mudanças também na Matemática, entre elas o surgimento de novos sistemas numéricos, desenvolvidos especialmente para o seu funcionamento e para facilitar o trabalho dos técnicos: o sistema binário, o octal e o hexadecimal.

2 OS NÚMEROS BINÁRIOS

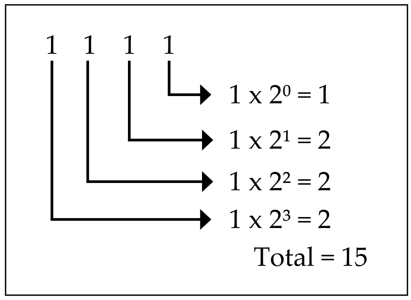
Os números binários foram desenvolvidos para facilitar os cálculos por meio da Álgebra Booleana, que está presente em todos os computadores. Na verdade foi a própria Álgebra Booleana que inspirou o surgimento deste sistema, uma vez que ela já era baseada em símbolos 1 e 0 para valores lógicos V ou F.

Assim como o nosso sistema possui 10 algarismos, o maia possui 20 e o mesopotâmico 60, este sistema possui apenas dois: 1 e 0. Através destes dois algarismos, baseado no sistema posicional, escreve-se qualquer número. Observe:

0 = 0	5 = 101	10 = 1010
1 = 1	6 = 110	11 = 1011
2 = 10	7 = 111	12 = 1100
3 = 11	8 = 1000	13 = 1101
4 = 100	9 = 1001	...

Como não possui algarismo para o número 2, ele é escrito pela combinação do 1 e 0, pois o algarismo 1 na segunda casa da direita para a esquerda vale 2^1 e não 10^1, como no sistema decimal. Veja na figura a seguir o valor relativo de cada posição no sistema binário:

FIGURA 22 – VALOR DE CADA POSIÇÃO NO SISTEMA BINÁRIO



FONTE: O autor

2.1 CONVERSÕES ENTRE NÚMEROS BINÁRIOS EM DECIMAIS

Quando um estudante de computação necessita converter um número binário num número decimal ou vice-versa, durante trabalhos escolares e pesquisas tecnológicas, pode utilizar calculadoras científicas e computadores que fazem esta transformação automaticamente. Todavia, ao programar uma máquina, necessita conhecer o processo lógico de conversão entre os dois sistemas.

Observe a seguir como converter um número do sistema binário em decimal:

$10110_2 =$
$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$
$16 + 0 + 4 + 2 + 0 = 22$
$10110_2 = 22_{10}$

Temos, então, que o número binário 10110 equivale ao 22 do sistema decimal. Para diferenciar um número do sistema binário do decimal, utilizaremos um índex com o valor da base. Veja que o algarismo de cada casa é multiplicado por uma potência de dois, sendo a primeira da direita $2^0 = 1$, as seguintes por $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ e assim por diante. A seguir seguem mais dois exemplos.

a) 110111_2
$110111_2 =$
$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$
$32 + 16 + 0 + 4 + 2 + 1 = 55$
$110111_2 = 55_{10}$

b) 10010010_2
$10010010_2 =$
$1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$
$128 + 0 + 0 + 16 + 0 + 0 + 2 + 0 = 146$
$10010010_2 = 146_{10}$

Para fazer a operação inversa, isto é, transformar decimal em binário, dividimos o número decimal a ser convertido por 2. O resto será o primeiro algarismo da direita e o quociente é dividido novamente por 2, e assim sucessivas vezes, guardando sempre o resto de cada divisão. Quando o quociente da divisão for 1, então basta juntar os restos que sobraram em cada divisão para formar o número binário equivalente. Exemplos:

a) 22_{10}

$$\begin{array}{r|l} 22 & 2 \\ \cline{2-2} -22 & 11 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 11 & 2 \\ \cline{2-2} -10 & 5 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \cline{2-2} -4 & 2 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} -2 & 1 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$22_{10} = 10110_2$

Ao escrevermos o número binário, devemos inverter a ordem de aparecimento dos restos nas divisões. Assim sendo, o quociente da última divisão é o primeiro algarismo da esquerda, o resto da última divisão é o segundo algarismo da esquerda, o resto da penúltima divisão é o terceiro algarismo da esquerda e assim por diante, até o resto da primeira divisão.

b) 55_{10}

$$\begin{array}{r|l} 55 & 2 \\ \cline{2-2} -54 & 27 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 27 & 2 \\ \cline{2-2} -26 & 13 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ \cline{2-2} -12 & 6 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} -6 & 3 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} -2 & 1 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$55_{10} = 110111_2$

c) 146_{10}

$$\begin{array}{r|l} 146 & 2 \\ \cline{2-2} -146 & 73 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 73 & 2 \\ \cline{2-2} -72 & 36 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ \cline{2-2} -36 & 18 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ \cline{2-2} -18 & 9 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \cline{2-2} -8 & 4 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \cline{2-2} -4 & 2 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} -2 & 1 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$146_{10} = 10010010_2$

Você já deve ter observado que no sistema binário são necessários muito mais algarismos para representar um número do que no sistema decimal. Vimos no exemplo anterior que o número 55, escrito com apenas dois dígitos no sistema decimal, necessita de 6 algarismos para ser representado no sistema binário. Este fato fez com que fosse muito trabalhosa a manipulação destes números. Eis que então matemáticos e técnicos resolveram utilizar os sistemas octal e hexadecimal para facilitar o trabalho com os computadores.

3 SISTEMAS HEXADECIMAL E OCTAL

A dúvida que deve pairar na cabeça dos estudantes deste livro é: por que inventar novos sistemas numéricos para simplificar a representação dos números binários se podemos fazer isso com o sistema já existente?

Você deve ter observado que a conversão entre números decimais e binários é bem trabalhosa, e foi justamente isto que impulsionou o desenvolvimento dos sistemas octal e hexadecimal.

3.1 SISTEMA OCTAL

O sistema numérico octal é um sistema posicional de base 8, ou seja, possui 8 algarismos. A contagem nesse sistema ocorre da seguinte forma:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, ... , 27, 30, 31, ... , 76, 77, 100, ...

Note que do 7 pulamos para o 10. Isto se dá pela falta dos algarismos 8 e 9. Na verdade a representação 10 no sistema octal equivale ao 8 do sistema decimal, da mesma forma que o 12 octal equivale ao 10 decimal.

$10_8 = 8_{10}$ $\qquad$ $12_8 = 10_{10}$

A conversão de um número do sistema octal para o decimal é semelhante a já apresentada entre os binários e decimais. Veja os exemplos:

a) 572_8
$572_8 =$
$5 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 =$
$5 \cdot 64 + 7 \cdot 8 + 2 \cdot 1 =$
$320 + 56 + 2 = 378$
$572_8 = 378_{10}$

Então temos que 572 em octal equivale a 378 em decimal.

b) 1406_8
$1406_8 =$
$1 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 =$
$1 \cdot 512 + 4 \cdot 64 + 0 \cdot 8 + 6 \cdot 1 =$
$512 + 256 + 0 + 6 = 774$
$1406_8 = 774_{10}$

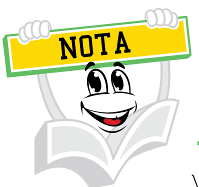
Ao converter de decimal para octal, procede-se da seguinte forma:

a) 774_{10}

$$\begin{array}{r|l} 774 & 8 \\ \hline -768 & 96 \\ \hline 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 96 & 8 \\ \hline -96 & 12 \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 8 \\ \hline -8 & 1 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$774_{10} = 1406_{8}$

Quando o quociente for menor que 8, paramos as divisões e escrevemos o número com os restos das divisões, começando pelo quociente da última divisão, do mesmo modo que foi feito no sistema binário.



Veja que a principal alteração nos métodos de conversões decimal-binário e decimal-octal é a substituição do 2 pelo 8 nos respectivos cálculos. Você vai observar o mesmo fato na conversão decimal-hexadecimal. Caso você queira escrever um número decimal no sistema maia ou mesopotâmico, pode utilizar o mesmo método aplicando 20 e 60 respectivamente.

A conversão de decimal para octal, e vice-versa, também é trabalhosa, tal qual a binária. No entanto, vemos que a conversão de binário é muito simples, praticamente não envolve cálculos, é apenas uma substituição através da seguinte tabela.

TABELA 1 – VALOR DE CADA POSIÇÃO NO SISTEMA BINÁRIO

Octal	Binário
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

FONTE: O autor

Fazendo uso da tabela, convertemos facilmente os binários listados a seguir. Veja o processo passo a passo:

a) 10110_2
I- Dividimos o número em grupos de 3 algarismos com barras entre eles.
10110 = 10 | 110
II- Substituímos cada trio pelo equivalente octal da tabela.
10 | 110 = 2 | 6
III- Tiramos as barras e está pronta a conversão.
$10110_2 = 26_8$

Perceba que o trio da esquerda estava incompleto, neste caso ele é completado por zero:

10 = 010
b) 11100111_2
11100111 = 11 | 100 | 111
11 | 100 | 111 = 3 | 4 | 7
$11100111_2 = 347_8$

O processo contrário é tão prático quanto o que acabamos de ver:

a) 206_8
206 = 010 | 000 | 110
$206_8 = 10000110_2$
b) 51_8
51 = 101 | 001
$51_8 = 101001_2$

8 é uma potência de 2, assim como o 16, isso torna os computadores mais eficientes e a conversão de números mais fácil e rápida.

3.2 SISTEMA HEXADECIMAL

Falar do sistema hexadecimal é praticamente repetir o subtópico do sistema octal, mudando apenas a quantidade de algarismos. Neste sistema, além dos algarismos do sistema indo-arábico, são acrescentadas mais seis letras, formando um sistema de 16 algarismos. Observe na sequência a seguir que é como se uma dezena fosse formada por 16 unidades.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, 10, 11, 12, ... , 19, 1A, 1B, 1C, 1D, 1E, 1F, 20, 21, ... , 29, 2A, 2B, 2C, 2D, 2E, 2F, 30, 31, ... , 98, 99, 9A, 9B, 9C, 9D, 9E, 9F, A0, A1, A2, A3, ... , A9, AA, AB, AC, AD, AE, AF, B0, B1, ... , F9, FA, FB, FC, FD, FE, FF, 100, 101, ...

As letras que aparecem não são incógnitas, nem estão formando monômios, elas são algarismos como o 2 e o 8. Como o nosso sistema possui apenas 10 algarismos, tomaram-se emprestadas as letras do alfabeto latino para criar mais 6 algarismos. Convenhamos, é muito mais prático utilizar letras do que inventar desenhos para representar algarismos novos.

Vale ainda apresentar as seguintes igualdades:

$A_{16} = 10_{10}$ $B_{16} = 11_{10}$ $C_{16} = 12_{10}$
$D_{16} = 13_{10}$ $E_{16} = 14_{10}$ $F_{16} = 15_{10}$

Para as conversões de decimal para hexadecimal, efetua-se divisões por 16 e mudam-se os restos para o sistema hexadecimal. Exemplos:

a) 1020_{10}

$$\begin{array}{r|l} 1020 & 16 \\ \cline{2-2} -1008 & 63 \\ \hline 12 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 63 & 16 \\ \cline{2-2} -48 & 3 \\ \hline 15 & \end{array}$$

Como $12_{10} = C_{16}$ e $15_{10} = F_{16}$, teremos:

$1020_{10} = 3FC_{16}$

b) 155_{10}

$$\begin{array}{r|l} 155 & 16 \\ \cline{2-2} -144 & 9 \\ \hline 11 & \end{array}$$

Como $11_{10} = B_{16}$, então:

$155_{10} = 9B_{16}$

E para o inverso, utilizamos as potências de 16. Exemplo:

a) $4D3_{16}$
$4 \cdot 16^2 + D \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 =$
Temos que $D_{16} = 13_{10}$, então:
$4 \cdot 256 + 13 \cdot 16 + 3 \cdot 1 =$
$1024 + 208 + 3 = 1235$
$4D3_{16} = 1235_{10}$

b) 25_{16}
$2 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 =$
$32 + 5 = 37$
$25_{16} = 37_{10}$

Atualmente, cada computador possui uma identidade chamada de endereço IP (Internet *Protocol*), em português significa Protocolo de Internet. Cada computador ao redor do mundo possui um endereço IP. Isso permite que pessoas e instituições troquem informações em redes públicas e privadas de computadores, sem que haja extravios de mensagens. É também através do IP que policiais conseguem identificar criminosos que atuam na internet, tal como pedófilos e estelionatários.

O endereço IP é formado por 32 dígitos binários divididos em 4 octetos, ou seja, grupos com 8 dígitos divididos por meio de pontos. Exemplo:

11001110 . 00110001 . 10101010 . 00010111

Quando um técnico está programando uma rede ou fazendo instalações de aparelhos num sistema integrado, precisa constantemente anotar e redigitar este gigantesco código. Isto tornaria o trabalho destes profissionais um tanto quanto demorado, cansativo e sujeito a erros. Para facilitar este trabalho, utiliza-se o sistema de numeração hexadecimal, pela facilidade que existe em converter números binários em hexadecimais e também o contrário.

A conversão entre estes dois sistemas é baseada em uma tabela parecida com a utilizada na conversão entre binários e octais.

TABELA 2 – VALOR DE CADA POSIÇÃO NO SISTEMA BINÁRIO

Hexadecimal	Binário
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

FONTE: O autor

Cada octeto do endereço IP é dividido ao meio, gerando dois grupos de 4 algarismos. Então basta substituir estes grupos pelos seus equivalentes da tabela. Exemplos:

a) $11001110 . 00110001 . 10101010 . 00010111_2$
1100|1110 . 0011|0001 . 1010|1010 . 0001|0111 =
C|E . 3|1 . A|A . 1|7
$11001110 . 00110001 . 10101010 . 00010111_2$ = $CE . 31 . AA . 17_{16}$

b) $00010110 . 11110000 . 00101001 . 11011011_2$
0001|0110 . 1111|0000 . 0010|1001 . 1101|1011 =
1|6 . F|0 . 2|9 . D|B
$00010110 . 11110000 . 00101001 . 11011011_2$ = $16 . F0 . 29 . DB_{16}$

Para converter de hexadecimal para binário, é praticamente o mesmo processo, só que em sentido contrário. Exemplo:

a) $45 . 8B . C7 . FF_{16}$
4|5 . 8|B . C|7 . F|F =
0100|0101 . 1000|1011 . 1100|0111 . 1111|1111
$45 . 8B . C7 . FF_{16}$ = $01000101 . 10001011 . 11000111 . 11111111_2$

Como diria o poeta e compositor Cazuza, "o tempo não para". Seria muita pretensão acreditar que o sistema numérico utilizado pela sociedade moderna é pronto e acabado, que é perfeito e nunca será substituído ou superado por outro. Pelo menos os números binários, octais e hexadecimais provaram que o sistema decimal pode até ser muito bom, porém não o suficiente.

Desde que surgiram os computadores, já foram desenvolvidos estes 3 novos sistemas. É justamente por causa disto que, ao ensinar em sala de aula a Matemática, devemos tomar cuidado para que o aluno perceba a Matemática como algo que está em movimento na história. Então, ao ensinar devemos fazer uso da história da Matemática e da humanidade.

4 A HISTÓRIA DOS NÚMEROS NA SALA DE AULA

A história da Matemática no ensino apareceu pela primeira vez por volta do ano de 1765, no livro de Clairaut com o título de *Eléments de Géométrie*. No final do século XIX e início do XX, aparecem novos trabalhos com a mesma relevância relacionando a história da Matemática com o seu ensino.

Existem vários educadores pesquisando e difundindo os estudos sobre a história da Matemática e seu potencial pedagógico. Entre eles, os de maior vultuosidade são Ubiratan D'Ambrosio, Sérgio Roberto Nobre e José Roberto Boettger Jardinetti.

Em suas pesquisas, buscam mostrar o valor pedagógico da história da Matemática no processo de ensino e aprendizagem. As pesquisas também mostram que a Matemática conhecida e ensinada hoje não é única. Todas as civilizações desenvolveram conhecimentos matemáticos específicos, em conformidade com as suas necessidades tecnológicas e econômicas. No desenvolvimento desses conhecimentos, há uma história que precisa ser resgatada como forma de entender as razões lógicas de seu surgimento.

Na opinião de D'Ambrosio, a história da Matemática ajuda a definir o que se entende por Matemática. Recorrer a ela no ensino serve para situá-la como uma manifestação cultural de vários povos em tempos diversos. Com isto o aluno entende que a Matemática que está aprendendo hoje faz parte da sua cultura.

Quando um professor ensina na sala de aula um dos sistemas analisados, deve fazê-lo com o intuito de apresentar a ideia de número, para que o aluno possa compreender melhor este conceito, e não pensando que um dia eles poderão utilizar estes sistemas ou que eles substituirão o nosso em breve.

Alguns dos sistemas estudados já cumpriram sua finalidade na história, representaram muito para as suas civilizações, fazendo parte da cultura de seus respectivos povos e ajudando a desenvolver suas tecnologias. Outros sistemas que analisamos estão presentes no dia a dia das pessoas e fazem parte da nossa cultura e da história.

E assim foram se desenvolvendo os números e os sistemas de numeração ao longo do tempo, para atender as necessidades dos seres humanos ao redor do mundo. Seja um homem pré-histórico, um escriba egípcio, um pastor etrusco, um comerciante árabe ou um técnico de computação, todos deram sua contribuição para a evolução da humanidade através da Matemática.

Como último parágrafo desta unidade, deixo uma provocação: qual será o próximo sistema numérico a ser desenvolvido? Quais suas características? Como e para atender quais necessidades surgirá? Será que deixará o sistema indo-arábico obsoleto?

RESUMO DO TÓPICO 4

Neste tópico, estudamos que:

- Os computadores forçaram a popularização do sistema numérico binário.
- Os binários são números escritos com apenas dois algarismos, 1 e 0.
- A dificuldade em trabalhar com os números binários fez com que os profissionais desta área adotassem também o sistema numérico octal e hexadecimal.
- A história dos números em sala de aula facilita o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de número, do sistema numérico atual e da Matemática como parte da nossa cultura.

AUTOATIVIDADE

1 Quais sistemas numéricos surgiram com o advento do computador?

2 Escreva os números a seguir no sistema binário, octal e hexadecimal.

a) 39
b) 128
c) 255

3 A seguir, temos alguns endereços IP no formato binário. Escreva-os no formato decimal e no hexadecimal.

a) 11010110.01110111.10111100.10100101

b) 00001111.00011000.01011110.00111100

c) 11011100.00101001.01001101.10111110

4 Converta os números hexadecimais a seguir para binários:

a) F2
b) A5
c) 89

5 Converta os números hexadecimais da questão anterior em decimais.

6 Baseado(a) nas técnicas de conversão que você aprendeu neste tópico, represente o número 4235_{10} (decimal) no sistema:

a) Maia
b) Mesopotâmico

7 Quais deveriam ser os objetivos do professor quando ensina um sistema numérico diferente do atual em sala de aula?

8 Depois de observar todos estes sistemas numéricos, você deve ter percebido que eles fazem parte da cultura de seus respectivos povos. É possível compreender que o sistema indo-arábico é tão importante para nossa cultura quanto um poema de Carlos Drummond de Andrade? Justifique sua resposta.

UNIDADE 2

A HISTÓRIA DA ÁLGEBRA, DA GEOMETRIA E DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Nessa unidade vamos:

- situar na história o surgimento de cada tipo de número, bem como os motivos de seu surgimento;
- utilizar a história de Gauss nas aulas de diversos conteúdos como motivação para os estudantes;
- reconhecer a importância de Gauss para a Matemática e a importância dos conjuntos numéricos para a ciência aplicada;
- conhecer as diversas fases do desenvolvimento da geometria e a potencialidade de cada uma dela para o ensino de geometria em sala de aula;
- perceber que, apesar da diversidade cultural existente em nosso planeta, todos os povos utilizam ou utilizavam a geometria no desenvolvimento de utensílios, moradias e da astronomia;
- conhecer as origens da álgebra para poder aplicá-las na prática de ensino diária, facilitando o aprendizado dos alunos;
- conhecer os grandes matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da álgebra e da geometria;
- perceber a pluralidade de nacionalidades e religiosidades que contribuíram para o desenvolvimento da álgebra e da geometria, dando a entender que a Matemática não tem fronteiras;
- saber que um gênio da Matemática é uma pessoa comum, com qualidades, defeitos, sentimentos e que um aluno, por mais que seja inteligente ou não, precisa respeitar os outros e ser respeitado.

PLANO DE ESTUDOS

Os estudos desta unidade serão apresentados em cinco tópicos, listados a seguir:

TÓPICO 1 – OS CONJUNTOS NUMÉRICOS E A HISTÓRIA

TÓPICO 2 – O PRODIGIOSO GAUSS

TÓPICO 3 – GEOMETRIA ANTIGA

TÓPICO 4 – GEOMETRIA MODERNA

TÓPICO 5 – HISTÓRIA DA ÁLGEBRA

TÓPICO 1

OS CONJUNTOS NUMÉRICOS E A HISTÓRIA

1 INTRODUÇÃO

Falar da história dos conjuntos numéricos é falar de uma história de milhares de anos, pois ela inicia nos tempos mais remotos e termina num passado muito recente.

Os conjuntos numéricos nada mais são do que uma forma de organizar os diversos tipos de números e classificá-los. Os primeiros a classificarem os números foram os discípulos de Pitágoras, pois foram eles que reconheceram que frações e raízes eram de naturezas diferentes. A primeira vez que se classificaram os números em conjuntos foi com o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos no século XIX. Eles foram classificados em Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais, Reais e Complexos.

Este conteúdo pode ser trabalhado de diversas formas em sala de aula. Uma delas pode ser a realização de um paralelo histórico, relacionando cada conjunto ao contexto histórico de seu surgimento.

Neste momento pode-se fazer o que muitos professores de História não têm oportunidade de fazer: situar ao longo da história as descobertas científicas, matemáticas e o nível de desenvolvimento tecnológico de algumas civilizações. Afinal, não é possível citar os eventos importantes específicos da História da Matemática nas aulas de História, principalmente se estes não são relevantes na história como um todo. Cabe, então, ao professor de Matemática cumprir este papel.

Ao apresentar os conjuntos numéricos em sala de aula, o professor tem uma grande oportunidade de falar da História da Matemática. Cada conjunto possui determinadas características associadas a necessidades operatórias, que foram surgindo com o desenvolvimento da ciência, comércio e outras necessidades sociais. Por exemplo, os Números Naturais que surgiram com a necessidade de contar.

2 OS NÚMEROS NATURAIS

Os números naturais possuem como principal característica o início em zero e o sucessivo acréscimo de unidades para se obter os outros números do conjunto. Esta característica tem origem histórica na contagem, que, como vimos, já era realizada pelos homens pré-históricos e até por alguns animais.

NOTA

Durante a graduação de Licenciatura em Matemática da Uniasselvi, você terá um aprofundamento maior sobre os conjuntos numéricos, com suas especificações, como propriedades e formas de representações. Agora vamos nos ater ao contexto histórico e a possíveis formas de apresentação deste conteúdo em sala de aula.

Introduzir este conteúdo baseado em seu contexto histórico faz com que o aluno possa compreender a simplicidade deste conjunto, associando um conjunto básico ao início do desenvolvimento humano.

Também é importante fazer com que o estudante entenda a diferença entre conjuntos numéricos e sistemas numéricos. O sistema é apenas a forma de representar um número, enquanto o conjunto são as características operatórias. Desta forma, o sistema numérico romano não é um conjunto numérico, nem os números naturais formam um sistema numérico, e isto precisa ficar claro para o aluno. O sistema numérico romano é utilizado para representar números naturais.

Com o passar dos anos, devido à evolução humana, os Números Naturais se tornaram insuficientes, momento em que surgiram os Números Inteiros (Z).

3 OS NÚMEROS INTEIROS

Os Números Naturais se tornaram insuficientes, pois com eles não era possível resolver subtrações em que o minuendo era menor que o subtraendo. Exemplos:

5 - 8 = ?   256 - 1000 = ?

Este tipo de cálculo surgiu com o advento do comércio para representar dívidas. Veja o que Paiva fala a respeito dos números negativos.

> Não se sabe exatamente quando se fez uso dos números negativos pela primeira vez. Sabe-se, porém, que por volta do ano 300 a.C. os chineses já faziam cálculos usando duas coleções de barras de bambu, marfim ou ferro – uma de barras vermelhas para indicar os números

> positivos e outra de barras pretas para indicar os números negativos. Provavelmente estes cálculos se referiam a débitos e créditos resultantes do comércio de mercadoria (PAIVA, 1995, p. 48).

Provavelmente, após as colheitas, os agricultores de determinada região levavam seus produtos para o comércio local onde adquiriam crédito, representados por barras vermelhas. Conforme iam fazendo compras durante o ano, nesse comércio, o crédito ia diminuindo, podendo passar à dívida (negativo), representada por barras pretas. Quando chegasse a nova colheita, o agricultor saldaria a dívida e teria novamente crédito, trocando as cores das barras.

O conjunto dos números inteiros é representado pela letra Z, que é a inicial da palavra alemã *zahl*, que nesta língua significa número. Foi na Alemanha do século XIV que pela primeira vez foi representado o resultado das subtrações observadas anteriormente:

$5 - 8 = - 3$ $\qquad\qquad$ $256 - 1000 = - 744$

No restante da Europa, os números negativos foram aceitos somente a partir do século XVI. “Daí o fato de serem chamados de negativos, porque eram a negação do que deveria ser um número [...]” (IMENES; LELLIS, 1998, p. 208-209).

Para falar dos Números Inteiros, o professor poderá citar essas duas civilizações distintas, a primeira na China do século III a.C. e a outra na Europa durante a Renascença do século XIV ao XVI. Apesar de terem sido aceitos como números apenas no século XVI, muitos matemáticos e comerciantes o utilizavam em seus estudos e em seu dia a dia no século XIV. Isto facilitava a vida de quem passava a ver o comércio e a ciência de uma forma diferente da medieval.

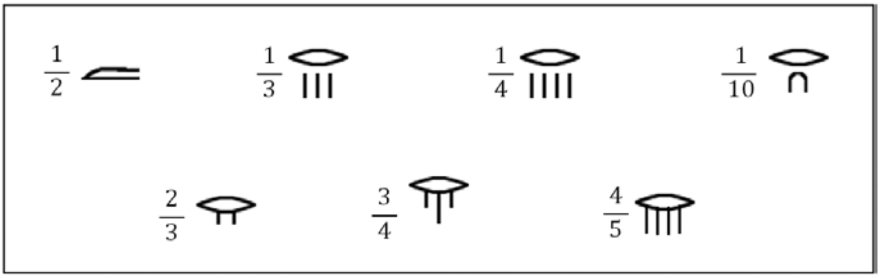
O Renascimento, impulsionado por uma economia dinâmica, gerou profundas mudanças na Europa. O aprimoramento das artes, da ciência, do comércio, o surgimento do protestantismo, da imprensa, do conceito de nação e as grandes navegações foram apenas alguns dos mais importantes eventos deste período. Neste contexto, surgem na Matemática os números negativos e, por consequência, o conjunto dos Inteiros, e ainda a forma primitiva de Bombelli para os Números Complexos.

4 OS NÚMEROS RACIONAIS

Antes dos chineses utilizarem os números inteiros, os egípcios, em 3000 a.C., já realizavam cálculos com frações unitárias. Segundo Arruda e Piletti (1997, p. 19), “funcionários mediam e demarcavam as propriedades. Impostos eram cobrados de acordo com o tamanho delas. Havia desconto se a colheita fosse prejudicada por enchentes excessivas”. Para funcionar este sistema de impostos, demarcações e descontos, é evidente a necessidade de conhecimentos sobre as frações.

Na figura seguinte, temos algumas formas de representar frações utilizadas pelos escribas, funcionários do Faraó encarregados de marcar e distribuir as terras, bem como avaliar a produção e coletar impostos.

FIGURA 23 – FRAÇÕES EGÍPCIAS



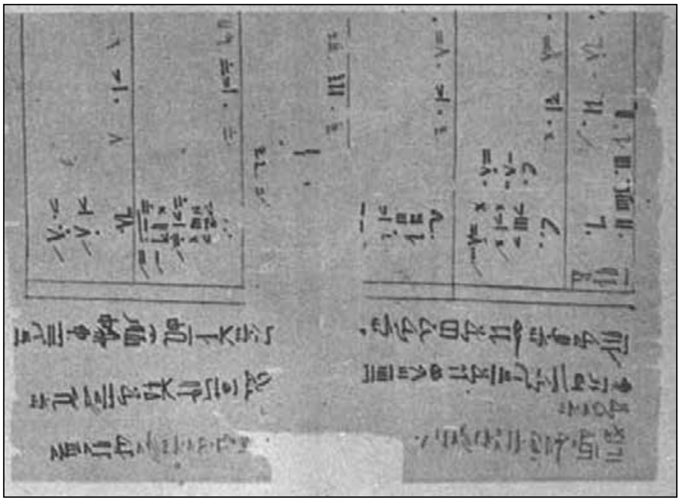
FONTE: Adaptado de: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Fra%C3%A7%C3%A3o>. Acesso em: 26 ago. 2010.

Note na figura que, para representar 1/3, 1/4 e 1/10, era desenhado algo parecido com uma semente de trigo ou cevada, e, logo abaixo, o número de partições, o denominador. Para representar 2/3, 3/4 e 4/5 os traços verticais ligados à semente representavam o numerador da fração e automaticamente o denominador seria o número consecutivo. Para escrever as demais frações, como, por exemplo, 2/5 ou 3/10, era feita a justaposição aditivas de frações unitárias, ou seja, 2/5 = 1/5 + 1/5, 3/10 = 1/5 + 1/10.

Dentre a documentação conhecida relativa ao Antigo Egito, destacamos o mais extenso e antigo de todos os documentos, o *Papyrus Rhind*, adquirido em Luxor por A. H. Rhind, no ano de 1858.

Este documento está guardado no *British Museum*, e compreende dois grandes rolos. Eles enfocam questões relativas à equivalência de frações, operações com números fracionários, proporções, regras de três, regra de falsa posição, a decomposição em partes proporcionais, assim como questões de Aritmética e problemas geométricos. O papiro de Rhind não apresenta um caráter didático. Não é um manual de cálculo como muitas vezes é tido, mas, sim, um importante organizador do saber da chamada ciência positiva na antiga civilização do Nilo. A figura que segue ilustra uma parte do papiro de Ahmes, também conhecido como Papiro de Rhind.

FIGURA 24 – TRECHO DO PAPIRO DE AHMES



FONTE: Fontes (1969, p. 67)

> Este papiro representa as regras para se perscrutar a natureza e se conhecer tudo quanto existe, cada mistério e cada segredo. Tenha-se presente que este rolo foi escrito no ano 33, no quarto mês da estação das águas, sob o domínio de Aausserre, rei do Alto e Baixo Egito. A cópia foi redigida pelo escriba Ahmés. (FONTES, 1969, p. 67).

NOTA

Perscrutar significa investigar minuciosamente. Os egípcios eram extremamente eficazes na arte de perscrutar.

Os números Racionais foram o segundo conjunto numérico utilizado pelo homem, principalmente na forma de fração. Do mesmo modo que os Inteiros, os Racionais também demoraram a ser aceitos como números na antiguidade. Embora o conjunto dos Inteiros esteja contido dentro do conjunto dos Racionais, este último já é utilizado pela humanidade há muito mais tempo.

Muitos autores consideram que as frações, e com elas os números racionais, surgiram para representar divisões não exatas, como $1 \div 2 = {}^{1}\!/_{2}$ e $4 \div 3 = {}^{4}\!/_{3}$. Assim, um número racional é todo aquele que pode ser escrito em forma de fração. Veja alguns exemplos:

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{51}{16}, \frac{6}{1}, \frac{0}{7}, -\frac{8}{1}$$

Observe que entre estas frações temos o 0 (zero) e o 6 (seis) que são números naturais e o -8 (oito negativo) que é um número inteiro. Assim sendo, os números racionais englobam os números inteiros que por sua vez englobam os números naturais.

O termo racional vem da palavra latina *ratio*, que quer dizer divisão. O conjunto de todos os números racionais é denotado pela letra Q, da palavra quociente. Atualmente, também representamos os números racionais como números decimais. Todavia, em alguns casos a representação dessa forma gera uma dízima periódica ($\frac{4}{3}$ = 1,33333...) ou um número com diversas casas depois da vírgula ($\frac{51}{16}$= 3,1875), comprometendo essa representação. Por causa disso, muitos matemáticos preferem utilizar apenas as frações para representar divisões não exatas.

5 OS NÚMEROS REAIS E IRRACIONAIS

Assim como as subtrações forçaram o surgimento dos números negativos e as divisões fizeram surgir as frações, as raízes fizeram surgir os números irracionais. Os Números Irracionais poderiam remeter o professor a comentar, em sala de aula, sobre a Grécia Antiga, onde surgiram, além deles, outras grandes descobertas, como o Teorema de Pitágoras, de Tales, o número π, sem falar na primeira grande obra da Matemática, Os Elementos de Euclides.

Depois o professor poderia relacionar os Números Reais com o nosso tempo, assim como atualmente a humanidade acumula todo o conhecimento produzido durante a história, os Reais também englobam todos os tipos de números, exceto os Complexos.

Apesar de os egípcios conhecerem a raiz quadrada há muito tempo, eles acreditavam que a raiz quadrada se tratava de um caso especial de fração. Somente os discípulos de Pitágoras foram capazes de demonstrar a irracionalidade das raízes quadradas. “Foram os discípulos de Pitágoras os primeiros a dar-se conta de que $\sqrt{2}$ não é um número do tipo a/b (a e b inteiros) e esta constatação provocou grande perplexidade entre os matemáticos gregos de então” (GARBI, 1997, p. 49).

Observe agora como é dada a prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$:

Suponhamos, então, que $\sqrt{2}$ seja um número de forma a/b, com a e b inteiros, e que esta fração esteja reduzida à sua forma mais simples, ou seja, a e b não tenham fatores em comuns. Assim:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \therefore a^2 = 2b^2$$

Significa que a^2 é um número par, de onde se conclui que a também é par, digamos 2p. Dessa forma:

$$(2p)^2 = 2b^2 \therefore 4p^2 = 2b^2 \therefore 2p^2 = b^2$$

Esta igualdade indica que b^2 é par, ou seja, que b é par. Logo, a e b são pares, mas isto é uma contradição com nossa hipótese inicial de que a e b não têm fatores comuns.

FONTE: Garbi (1997, p. 198-199)

Constatada a existência de números não racionais, surge então um novo conjunto numérico, o dos Irracionais. Este conjunto é o único que não recebe símbolo, podendo ser representado por Ir ou R^C, por ser apenas o complementar dos Racionais em relação aos Reais (R). Ou seja, a união entre Racionais e Irracionais formam o Conjunto dos Números Reais. O primeiro a chamar estes números de Reais foi René Descartes.

Não somente as raízes dão origem aos números irracionais, mas também os logaritmos, as razões trigonométricas e muitos outros números que podemos representar com infinitas casas decimais sem formarem dízimas periódicas. Veja alguns exemplos de números irracionais:

1,02022022202222...
log 35 = 1,544068...
sen 35º = 0,5735764...

Estes números não podem ser escritos na forma de fração, não são Racionais, logo recebem o nome de Irracionais. É por causa destes números que surgem o conjunto dos números Reais. Se não existissem os números Irracionais, se todos os números fossem Racionais seria desnecessário o conjunto o dos números Reais.

Hoje, quando buscamos nas calculadoras o resultado para um logaritmo, nós não nos damos conta da grande importância histórica que estes números irracionais tiveram para a humanidade e para a Matemática.

5.1 LOGARITMOS

Os logaritmos surgiram de necessidades cotidianas da sociedade europeia no início do século XVII. Tanto isto é verdade que os logaritmos surgiram ao mesmo tempo em dois lugares diferentes, pela criatividade e necessidade de dois homens comuns que não se conheciam e buscavam simplificar cálculos relativos a juros compostos, usados corriqueiramente em seus negócios.

Um deles foi o relojoeiro suíço Jobst Bürgi (1552-1632), cujo trabalho foi "publicado em Praga, *Arithmetische und Geometrische Progresstabulen* (Tábuas de Progressões Aritméticas e Geométricas)" (BARSA, 1999, CD-ROM, Macro, Logaritmo) em 1620. Antes dele, o latifundiário escocês John Neper ou Nepier (1550-1617) publicou sua obra *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio* (Descrição das Normas dos Logaritmos Maravilhosos) em 1614.

Sabemos que ambos trabalharam independentemente durante anos na construção das tábuas de logaritmos. Provavelmente os primeiros passos nesta área foram dados no final do século XVI, como nos fala Paiva (1999, p. 106), "[...] credita-se a Nepier a criação dos logaritmos, devido a vinte anos de trabalho que culminaram com a publicação de sua obra [...] em 1614". Um dos maiores entusiastas do trabalho de Nepier foi o professor da Universidade de Oxford, o inglês Henry Briggs (1561-1639). O trabalho dos dois juntos resultou nos logaritmos decimais.

O que os matemáticos e a sociedade científica, em geral, buscavam naquela época era uma maneira de realizar cálculos muito trabalhosos de maneira mais simples e rápida. Os logaritmos então surgiram, pois através deles é possível "[...] rebaixar a ordem de dificuldade das operações aritméticas, transformando multiplicações em somas, divisões em subtrações, potenciações em multiplicações e radiciações em divisões" (FLORIANI, 1999, p. 15).

Vejamos alguns exemplos:

- Imaginem um astrônomo que precisasse resolver a potência $2^{1,5}$ no século XVII. Sem dúvida demoraria muito para chegar ao resultado, já que naquela época não existiam computadores e nem simples calculadoras. Já com a ajuda dos logaritmos, a dificuldade poderia ser vencida da seguinte forma:

$2^{1,5} = x$
$\log 2^{1,5} = \log x$
$1,5 \cdot \log 2 = \log x$
$1,5 \cdot 0,30103 = \log x$
$0,45154 = \log x$
$x = 2,828$
$2^{1,5} = 2,828$

Desta forma, como disse o astrônomo Johann Kepler (1571-1630), a vida útil de um astrônomo teria sido multiplicada por 10.

- Considere agora a situação de um banqueiro que tinha que cobrar um empréstimo de 2.000 libras por 2 anos com uma taxa de 15% ao mês. Hoje em dia, bastaria ter à mão uma calculadora financeira que isto seria resolvido rapidamente. Observe agora como este cálculo seria feito com o auxílio apenas das tábuas de logaritmos:

Utilizando a fórmula do montante, temos:

$2.000(1+0,15)^{24} = M$
$2.000(1,15)^{24} = M$

Separamos então a parte da potência e resolvemos como no exemplo anterior.

$1,15^{24} = x$
$\log 1,15^{24} = \log x$
$24 \cdot \log 1,15 = \log x$
$1,45675 = \log x$
$x = 28,62518$

Voltando para a fórmula do montante:

$2000 \cdot 28,62518 = M$
$M = 57.250,36$

O valor a ser cobrado no final do empréstimo seria de 57.250,36 libras.

Isto passou não só a facilitar a vida de astrônomos e banqueiros, como também a de navegantes, cientistas, comerciantes e da população em geral. A contribuição dos logaritmos na resolução de cálculos trabalhosos durou até a chegada dos computadores e da calculadora. As réguas de cálculo utilizadas até o final do século XX (sendo substituída pela calculadora) nas universidades também seguem o princípio dos logaritmos em sua fabricação e utilização.

Com o advento dos computadores e das calculadoras científicas, não faz mais sentido o cálculo de potências e raízes utilizando os logaritmos, mas podemos encontrar os logaritmos em aplicações como:

- Escala Richter;
- nível sonoro;
- capitalização composta;
- teste do carbono 14;
- medição do PH (ácidos e bases);
- função de crescimento de plantas e animais;

- dissipação da radioatividade de um objeto;
- determinação da taxa de álcool no sangue;
- taxa de crescimento de populações.

O professor que se propõe a ensinar logaritmos não pode compreendê-los apenas como sendo um conjunto de regras matemáticas e lógicas, devido à grande aplicabilidade deste conteúdo no cotidiano.

Uma abordagem histórica sobre este assunto também se faz necessária devido à motivação que levou os matemáticos a descobrirem os logaritmos e pela forma que isto se deu, em dois lugares diferentes e por dois homens simples que não se conheciam, porém com o mesmo objetivo. Pode-se abordar o conceito básico de Logaritmo e suas propriedades.

6 NÚMEROS COMPLEXOS

Antes do surgimento dos números complexos, no ano de 1572, toda equação do 2º grau com $\Delta < 0$ era considerada sem solução, pois nos números reais não existe solução para raízes quadradas de números negativos. Exemplo:

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Como não existe raiz quadrada de -8, conclui-se que esta equação não possui solução, a menos que se aceite uma solução na forma de números complexos.

Isto também acontecia com as equações do 3º grau, que eram resolvidas pela fórmula de Cardano. Sempre que ela apresentava uma raiz quadrada de um número negativo era considerada sem solução. O curioso aconteceu quando os matemáticos da época observaram a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Seja, por exemplo, a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. Por simples verificação constata-se que $x = 4$ é uma de suas raízes (as outras duas, menos evidentes, são $-2+\sqrt{3}$ e $-2-\sqrt{3}$). Entretanto, se tentarmos resolvê-la pela fórmula de Cardano, teremos:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

e caímos não apenas na extração de raízes quadradas de números negativos, mas também na extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecidas.

FONTE: Garbi (1997, p. 46)

Os matemáticos estavam diante de uma equação com solução conhecida, mas que não poderia ser calculada pelo método conhecido na época. Era necessário algo novo, ou uma nova fórmula ou uma nova compreensão das raízes quadradas de números negativos.

Foi quando, em 1572, brilhou o gênio do italiano Raphael Bombelli (1526-1573). Bombelli nasceu em Bologna e além de algebrista era engenheiro hidráulico. Qualquer semelhança entre seu nome e o da máquina bomba hidráulica não é mera coincidência, pois suas contribuições nessa área também foram significantes.

Os estudos de Bombelli começaram com a tentativa de conciliar o resultado fornecido pela fórmula de Cardano para a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

com a raiz $x = 4$, constatada por simples observação. Conforme ele mesmo revelou em 1572, no livro *L'Algebra parte Maggiore dell'Aritmetica*.

FONTE: Garbi (1997, p. 49-50)

Bombelli considerou, então,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b} \qquad (*)$$

$$\sqrt[3]{2} - \sqrt{-121} = a - \sqrt{-b} \qquad (**)$$

e deduziu que a = 2 e b = 1, pois em (*) temos:

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot\sqrt{-1} + 3\cdot 2\left(\sqrt{-1}\right)^2 + \sqrt{-1}^3$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} + 6\cdot(-1) - \sqrt{-1}$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Foi quando Bombelli teve a ideia de admitir que $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$, podendo concluir, então, que:

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

$$2+\sqrt{-1} = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$$

Da mesma forma, para (**) concluiu que:

$$2-\sqrt{-1} = \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Por fim, calculou o valor de x substituindo os resultados obtidos.

$$x = \left(2+\sqrt{-1}\right) + \left(2-\sqrt{-1}\right)$$

$$x = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}$$

$$x = 4$$

O que se pode observar com Bombelli é que sua descoberta não estava ligada a uma necessidade prática de seu dia a dia, embora fosse engenheiro hidráulico. Bombelli simplesmente se propôs a resolver um desafio deixado por Cardano.

"Raphael Bombelli [...] era um admirador da *Ars Magna* de Cardano, publicada em 1545, mas achava que seu estilo de exposição não era claro. Decidiu, então, escrever um livro expondo os mesmos assuntos, mas de forma tal que um principiante pudesse estudá-los [...]" (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI Jr., 2003, p. 559).

Já que a equação resolvida por Bombelli era parte da *Ars Magna*, e, como devido a ela, surgiram os números complexos, pode-se concluir que os números complexos foram criados a partir da admiração que um gênio tinha pela matemática.

Mais tarde outros matemáticos se ocuparam com o estudo dos números complexos, entre eles René Descartes (1596-1650), que em 1637 utilizou os termos reais e imaginários, bem como também a expressão Números Complexos.

Leonard Euler (1707-1783) utilizou pela primeira vez o símbolo i para representar $\sqrt{-1}$. Euler foi um dos maiores pesquisadores dos números imaginários, inclusive dando a eles a sua forma atual ($z = a + b \cdot i$ onde a e b são reais e $i = \sqrt{-1}$). Entre outras coisas, descobriu como extrair raízes de qualquer ordem destes números. As aplicações desta e de outras descobertas relacionadas aos números complexos foram inúmeras, principalmente com o auxílio do cálculo diferencial integral.

Foi Euler também que reuniu "em uma só fórmula os cinco números mais famosos de toda a matemática: $e^{i\pi} + 1 = 0$" (GARBI, 1997, p. 112).

Outro que não pode deixar de ser citado é Carl Friedrich Gauss (1777-1855), pois foi ele que atribuiu a estes números sua forma geométrica baseada no plano cartesiano. Gauss criou uma maneira de graficar os números complexos, com o simples objetivo de facilitar sua compreensão.

Atualmente, esta forma de Números Complexos é amplamente aplicada nas engenharias, principalmente na elétrica.

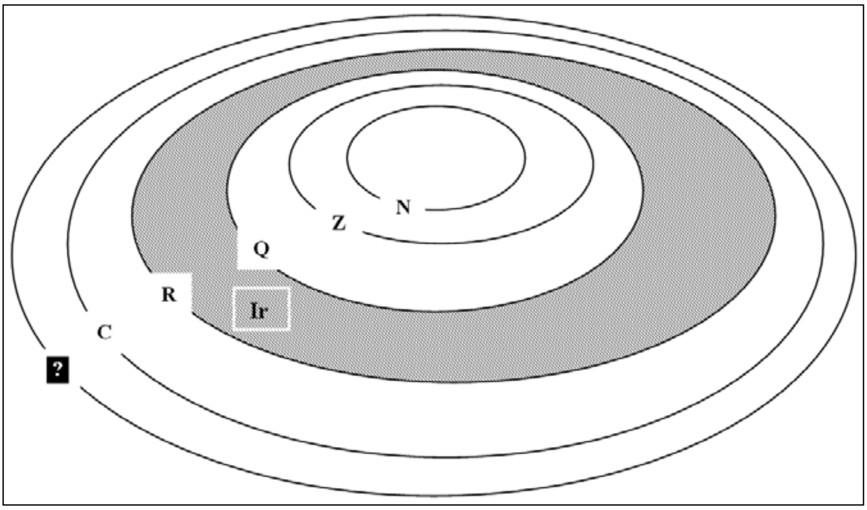
O que estes matemáticos, Bombelli, Descartes, Euler e Gauss têm de curioso é que todos fizeram suas descobertas nesta área por simples admiração à Matemática. Nenhum deles tinha uma aplicação prática para suas descobertas de imediato, exceto na Matemática Pura ou no Cálculo Diferencial e Integral, com Euler e Gauss. Isto é apenas um indício de que a Matemática nem sempre surge da necessidade do homem.

7 O DIAGRAMA DE VENN

Será que existe algum tipo de número que não conhecemos? Será que atualmente, algum conjunto numérico goza de nosso preconceito ou nossa ignorância? Esta é uma questão que devemos nos fazer após observar a história dos Conjuntos Numéricos. A evolução do conhecimento humano não está restrita às vacinas, à astronomia e à estrutura do átomo. Os números também evoluem conforme a necessidade. Nada impede de vir outro conjunto numérico que englobe inclusive os Complexos.

Vamos terminar este tópico observando um diagrama de Venn que mostra graficamente a noção de pertinência entre os conjuntos, sem que esta representação nos impeça de imaginarmos um possível novo conjunto.

FIGURA 25 – DIAGRAMA DE VENN COM OS CONJUNTOS NUMÉRICOS



FONTE: O autor

RESUMO DO TÓPICO 1

Neste tópico, você acompanhou:

- O surgimento do Conjunto dos Números Naturais e a diferença entre Sistema Numérico e Conjunto Numérico.

- O surgimento e o desenvolvimento dos demais conjuntos numéricos, bem como suas justificativas e atuais aplicações.

- Que o *Papiro de Rhind* é o mais antigo dos papiros de que se tem notícia e que ele trata, entre outras coisas, sobre matemática.

- Como surgiram os logaritmos.

AUTOATIVIDADE

Responda às seguintes questões:

1 Escreva com suas próprias palavras a diferença entre Sistema Numérico e Conjunto Numérico.

2 Dê um exemplo de operação que levou ao surgimento dos:

a) Números Inteiros.
b) Números Racionais.
c) Números Reais.
d) Números Complexos.

3 Segundo o tópico que acabamos de estudar, qual a nacionalidade de cada conjunto numérico da questão anterior? Em que época?

4 Escreva as seguintes frações em hieróglifos egípcios:

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{5}{6}$

c) $\frac{1}{20}$

5 Utilizando o método apresentado neste tópico, mostre que $\sqrt{3}$ é um número irracional. Será que um aluno do Ensino Médio seria capaz de compreender esta prova?

O PRODIGIOSO GAUSS

1 INTRODUÇÃO

O nome Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é sinônimo de genialidade e de um raciocínio lógico apurado, principalmente para as pessoas familiarizadas com a Matemática. Ele era mesmo fantástico, uma das mentes mais espetaculares de que se tem notícia nas Ciências Exatas. Para especialistas da Matemática, tanto antigos como os de hoje, apenas dois outros gigantes da Matemática podem ser ombreados a Gauss: Arquimedes e Newton. No entanto, Gauss sempre se mostrou modesto e recatado e, contrariamente do que diziam seus colegas, julgava-se sempre um degrau abaixo daqueles dois gênios.

FIGURA 26 – CARL FRIEDRICH GAUSS

FONTE: Eves (2004, p. 521)

2 O MAIOR MATEMÁTICO DE TODOS OS TEMPOS

Nasceu na Alemanha, na cidade de Braunschweig, em 30 de abril de 1777, exatamente cinquenta anos após a morte de Newton. Seus pais pertenciam a uma classe da população chamada de "semicidadãos", morava em um bairro pobre, numa cidade pobre. Sua mãe, analfabeta, chamava-se Doroteia e trabalhava como empregada doméstica. Seu pai, Gerhard, tinha várias atividades, todas mal pagas.

Existem diversas histórias sobre a infância de Gauss. Sabe-se que ele conseguia fazer cálculos aritméticos quase antes de começar a falar. A história mais famosa do talento de Gauss aconteceu em um sábado, em torno do seu terceiro aniversário. Seu pai estava trabalhando em folhas de pagamento semanal (um de seus muitos trabalhos) para um grupo de trabalhadores. Quando passado algum tempo, Gerhard não percebeu que seu filho o observava atentamente. Uma criança comum estaria ali apenas para rabiscar alguns papéis, mas Gauss não era comum e surpreendeu seu pai, dizendo algo como: “Somou errado”.

Nunca havia recebido treinamento para isso, aliás, ninguém jamais tinha ensinado nada disso a Gauss. Talvez se isto tivesse ocorrido nos tempos de hoje pudesse parecer normal aos nossos olhos, mas, naquela época, os pais de Carl não estavam acostumados com isso. Nesta ocasião, o pequeno menino já tinha aprendido a ler sozinho, mas isso infelizmente não despertou interesse do pai do menino, em alimentar os talentos do filho.

Gerhard poderia ter encontrado algum modo de incentivar os estudos de seu filho, mas o que ele fez foi entregar-lhe a tarefa de conferir semanalmente os cálculos das folhas de pagamento. De vez em quanto, seu pai o levava para divertir seus amigos como se estivessem num tipo de *show* de crianças superdotadas. As atitudes fizeram com que Gauss, nos últimos anos de sua vida, desdenhasse abertamente de seu pai, chamando-o de “dominador, grosseiro e impolido”.

Felizmente, Gauss teve sorte, de forma a ser abençoado com duas pessoas de sua família que acreditavam em seu potencial: sua mãe, Doroteia e seu tio Johann, irmão de sua mãe. Carl era o orgulho de sua mãe. Anos mais tarde, trouxe em sua humilde casa um colega de faculdade chamado Farkas (Wolfgang) Bolyai e discretamente Doroteia chamou o amigo em um canto e perguntou se Carl era realmente inteligente como todos diziam ser, e, se assim fosse, aonde isso o levaria. Bolyai olhou para Doroteia e disse: “Seu filho está destinado a ser o maior de todos os matemáticos da Europa”. Neste instante, Doroteia irrompeu em lágrimas de felicidade e orgulho.

3 GAUSS: UM ALUNO BRILHANTE

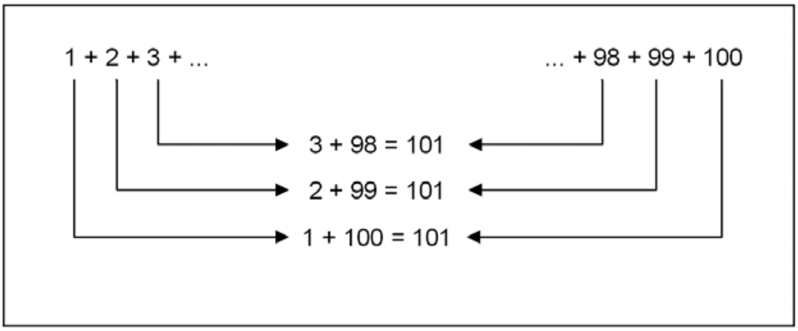
Gauss ingressou na sua primeira escola aos 7 anos de idade. A escola não era nada parecida com as escolas francesas de ensino especializado como a de Descartes. Poderíamos dizer que ela ia, como Gauss mesmo mencionava, de “prisão miserável” a “toca do inferno”. Essa escola era dirigida por um professor (guarda) chamado de Buettner, cujo nome em alemão pode significar “Faça o que eu mandar, se não eu vou surrar você”. Quando Gauss estava no terceiro ano, finalmente permitiram que ele estudasse o que ele tanto gostava e que já estava capacitado desde os dois anos de idade.

Na aula de Aritmética, Buettner gostava de estimular seus alunos matematicamente dando-lhes longas colunas de números para que somassem, algumas vezes com até cem números. Buettner era um professor que aparentemente não gostava de realizar atividades lúdicas e que, por consequência, requeressem muito empenho de sua parte. Então, o que ele fazia constantemente era passar sequências que pudessem ser somadas com grande facilidade através de alguma fórmula que, é claro, ele não compartilhava com seus alunos.

Um dia o professor passou o exercício de somar todos os números de 1 a 100. Assim que terminou de enunciar o problema, seu mais jovem aluno, Carl, entregou-lhe sua lousa. É necessário mencionarmos que ele entregou a lousa com uma hora de antecedência dos demais.

Quando Buettner conferiu as lousas, percebeu que o único a acertar a resposta entre os seus 50 alunos foi Gauss e em sua lousa não havia nenhuma marca de qualquer tipo de cálculo. Então, aparentemente, Gauss havia descoberto alguma das fórmulas para que pudesse obter a soma e conseguiu calcular a resposta de cabeça. Não temos certeza, mas é provável que Gauss tenha notado o que acontece se você resolver somar não um, mas dois conjuntos de todos os números inteiros de 1 a 100.

FIGURA 27 – SOMA DOS EXTREMOS DE UMA SEQUÊNCIA



FONTE: O autor

Observe que a soma do último com o primeiro é 101, do segundo com o penúltimo também é 101 e assim por diante até chegar ao meio da sequência, onde teremos $50 + 51 = 101$. Desta forma, são 50 números 101, logo a soma pode ser resolvida rapidamente através da multiplicação $50 \cdot 101 = 5050$.

Esta fórmula é um caso especial que já era conhecido pelos pitagóricos. Eles a usavam como uma espécie de senha na sua sociedade secreta, onde “a soma dos números de um até qualquer número é igual à metade do último, vezes o último número mais um”.

4 SÉRIES E SEQUÊNCIAS

No Ensino Médio existe um conteúdo chamado Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG). Tanto a PA quanto a PG são sequências de números que podem ser finitas ou infinitas e que obedecem a algumas regras de formação. Exemplos:

• sequência de todos os números naturais ímpares. PA → (1, 3, 5, 7, 9, ...);
• sequência dos primeiros 6 múltiplos de 5 positivos. PA → (5, 10, 15, 20, 25, 30);
• sequência das potências de 2 maiores que 1. PG → (2, 4, 8, 16, ...).

Para iniciar este conteúdo, os professores podem utilizar a história de Gauss como motivação. Logo após contar o feito de Gauss aos 7 anos de idade, o professor pode propor aos alunos outro desafio, como, por exemplo:

• somar todos os números de 1 a 1000;
• somar todos os números pares de 100 até 200.

Os dois casos são exemplos da soma de finitos termos de uma PA.

4.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

"Progressão aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior **adicionado** a um número fixo, chamado de razão da progressão." (GIOVANNI; BONJORNO, 2000, p. 345).

Genericamente, uma PA pode ser representada da seguinte maneira:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots),$$

onde a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo e assim sucessivamente, e n é um número Natural maior que zero que indica a posição de cada termo. Nesta sequência, temos a seguinte lei de formação:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$a_{n+1} = a_n + r$$

Para determinarmos o valor da razão (r) de uma PA, basta fazermos $a_2 - a_1 = r$ ou $a_{n+1} - a_n = r$. Para encontrarmos o valor do enésimo termo de uma PA, sem precisarmos escrevê-la toda, basta recorrermos à fórmula do termo geral da PA.

$$a_n = a_1 + (n-1)r,$$

a_n = enésimo termo — a_1 = primeiro termo
n = número de termos — r = razão de formação

Quando Gauss, aos 7 anos de idade, somou todos os números de 1 a 100 em poucos instantes, não conhecia nada sobre PA. Aliás foi ele quem desenvolveu os estudos sobre este assunto. Seu método de soma deu origem à fórmula da soma dos termos de uma PA.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

S_n = soma dos n termos
a_n = enésimo termo
a_1 = primeiro termo
n = número de termos

Vamos tomar como exemplo as PAs apresentadas no início do tópico:

Exemplo 1:

5, 10, 15, 20, 25, 30
$a_1 = 5$

$r = 10 – 5$
$r = 5$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$a_6 = 5 + (6-1)5$$
$$a_6 = 5 + 5 \cdot 5$$
$$a_6 = 5 + 25$$
$$a_6 = 30$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$
$$S_6 = \frac{(5+30)6}{2}$$
$$S_6 = \frac{35 \cdot 6}{2}$$
$$S_6 = \frac{210}{2}$$
$$S_6 = 105$$

Podemos conferir que o sexto termo é o número 30 e que a soma dos seis primeiros termos é 105.

Exemplo 2:

Somar todos os números pares de 100 até 200.

$a_1 = 100$

$r = 102 - 100$
$r = 2$

$a_n = 200$

$a_n = a_1 + (n – 1)r$
$200 = 100 + (n – 1)\cdot 2$
$200 – 100 = (n – 1)\cdot 2$
$100 \div 2 = n – 1$
$50 + 1 = n$
$n = 51$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$
$$S_{51} = \frac{(100 + 200)51}{2}$$
$$S_{51} = \frac{300 \cdot 51}{2}$$
$$S_{51} = \frac{15300}{2}$$
$$S_{51} = 7650$$

O desenvolvimento da PA logo fez despontar os estudos de outro tipo de sequência: a Progressão Geométrica (PG). Podemos dizer que a PG é evolução natural da PA, o que é perceptível já na definição de PG.

4.2 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

"Progressão geométrica é uma sequência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior **multiplicado** por um número fixo, chamado razão da progressão" (GIOVANNI; BONJORNO, 2000, p. 360).

A principal diferença entre as definições de PA e PG são, respectivamente, as palavras **adicionado** e **multiplicado**. A forma genérica de uma PG é:

$(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots)$

De acordo com a definição, os termos a partir de p_2 são calculados da seguinte forma:

$p_2 = p_1 \cdot q$
$p_3 = p_2 \cdot q$
$p_4 = p_3 \cdot q$
$p_{n+1} = p_n \cdot q$

A razão de uma PG é representada pela letra "q" por dois motivos. O primeiro, para diferenciá-la da razão "r" utilizada na PA. A outra, pela maneira de calculá-la, $p_2 \div p_1 = q$. A razão é resultado de uma divisão, logo um quociente.

Para calcular o enésimo termo de uma PG, pode ser utilizada sua fórmula geral:

$p_n = p_1 \cdot q^{n-1}$

p_n = enésimo termo
p_1 = primeiro termo
n = número de termos
q = razão de formação

Atualmente, a PG é utilizada para efetuar cálculos relacionados à matemática financeira, à microbiologia, além de muitas outras áreas.

Além de calcular o valor do enésimo termo, é possível também calcular a soma destes termos. O cálculo da soma dos n primeiros termos de uma PG (S_n) se dá pela fórmula:

$$S_n = \frac{p_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}, \text{com } q \neq 1$$

Para q = 1, a fórmula é:

$$S_n = n \cdot p_1$$

Exemplo: Determine o 12º termo da PG a seguir e calcule a soma dos 10 primeiros termos. 2, 4, 8, 16, ...

$p_1 = 2$

$q = 4 \div 2$
$q = 2$

$p_{12} = 2 \cdot 2^{12-1}$
$p_{12} = 2 \cdot 2^{11}$
$p_{12} = 2 \cdot 2048$
$p_{12} = 4096$

$$S_{10} = \frac{2\left(2^{10} - 1\right)}{2-1}$$

$$S_{10} = \frac{2\left(1024 - 1\right)}{1}$$

$$S_{10} = 2 \cdot 1023$$
$$S_{10} = 2046$$

Resposta: o 12º termo é o número 4096 e a soma dos 10 primeiros termos é 2046.

Algo curioso acontece com as PG cujo q é maior que -1 e menor que 1(-1 < q < 1). Exemplos:

$$\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\right)$$

(8 ; 0,8 ; 0,08 ; 0,008 ; ...)

Nestes dois exemplos, as razões são respectivamente $\frac{1}{2}$ e 0,1. Observe que os termos vão reduzindo de tamanho, aproximando-se cada vez mais de zero. Quando isto acontece, a soma dos infinitos termos não é um número infinito, como nos outros valores de "q", e podemos calcular o resultado dela:

$$S=\frac{p_1}{1-q}$$

Na primeira PG, a soma dos infinitos termos se dá:

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$
$$S=\frac{1}{\frac{1}{2}}$$
$$S=2$$

Na segunda, o cálculo é:

$$S=\frac{8}{1-0,1}$$
$$S=\frac{8}{0,9}$$
$$S=8,888\ldots$$

A história de Gauss é um apelo interessante a ser utilizado nas aulas de PA e PG. O fato de o aluno ficar sabendo que a matemática pode remeter alguém ao *status* de melhor do mundo, e que pode abrir portas em universidades, faz com que esta história desperte o interesse não só pelo conteúdo PA e PG, mas por toda a matemática e pela ciência de modo geral.

5 GAUSS NA UNIVERSIDADE

Buettner ficou espantado com o feito de Gauss na soma de 1 a 100. Assim como era rápido em usar o chicote para castigar seus aprendizes atrasados, ele também apreciava muito os gênios. “Seus mestres logo levaram o talento de Gauss à atenção do Duque de Brunswick, que apoiou seus estudos, primeiro para que pudesse cursar o colégio normal, depois na Universidade de Göttingen, onde se matriculou em outubro de 1795” (BOYER, 2006, p. 344).

Gauss, que acabou lecionando Matemática na faculdade, nunca foi capaz de usar chicote em seus alunos, mas herdou de seu antigo professor o desprezo pela falta de inteligência. Anos mais tarde, Gauss escrevia desgostoso sobre seus alunos em uma de suas classes: “Um é apenas moderadamente preparado, o outro, menos do que moderadamente, e o terceiro, este tem falta de preparo e também de habilidades...” (MLODINOW, 2005, p. 108).

Ao chegar a Göttingen para estudar, Gauss estava totalmente tomado por sua paixão pela Teoria dos Números, certamente por influência das leituras feitas dos trabalhos de Euler. Gauss sempre dizia: a Matemática é a RAINHA DAS CIÊNCIAS e a Teoria dos Números é a rainha da Matemática.

Dois anos após sua dissertação de doutorado, foi publicado *Disquisitiones Arithmeticae*, obra que Gauss havia iniciado ainda como estudante em Göttingen. Considerada um dos grandes clássicos da literatura matemática, *Disquisitiones Arithmeticae* é composta de 7 secções. Nas quatro primeiras traz um compacto da Teoria dos Números do século XVIII. Nas últimas 3 secções, trata da teoria das formas quadráticas binárias, resolução da equação ciclotômica geral de grau primo e diversas aplicações. Nesta obra, ainda, apresenta o Teorema Fundamental da Aritmética, a Teoria das Congruências, e define os Números Inteiros de Gauss como sendo todos os números que podem ser escritos na forma “a + bi”, onde a e b são inteiros. Exemplo: 2 + 4i.

Os inteiros de Gauss formam um domínio de integridade como os inteiros reais, porém mais gerais. Os problemas de divisibilidade tornam-se mais complicados, pois cinco já não é mais primo, sendo decomponível no produto dos dois “primos” 1 + 2i e 1 - 2i. Na verdade, nenhum primo real da forma 4n + 1, é um “primo de Gauss”, ao passo que primos reais da forma 4n - 1 permanecem primos no sentido generalizado (BOYER, 2006, p. 347).

Desta forma, a obra e história de Gauss podem ser utilizadas no ensino dos Números Complexos, propondo aos alunos buscarem identificar números primos que não são “primos de Gauss”. Nesta área, Gauss publicou artigos sobre a representação geométrica dos números complexos, conteúdo que faz parte dos livros do 3º ano do Ensino Médio.

O gênio multiforme de Carl Friedrich Gauss tinha interesses amplos, que incluíam a Matemática, a Astronomia e a Física. Descobriu como calcular as órbitas dos asteroides, foi o pioneiro da teoria eletromagnética e inventou um telégrafo. Chegou a ser diretor do observatório de Göttingen, onde se envolveu na construção e desenvolvimento de equipamentos para a astronomia.

Na Matemática, além de contribuir notavelmente para a teoria dos números, colaborou para a teoria das funções, a geometria, a teoria dos erros, a probabilidade e a estatística. Por isso, será falado sobre Gauss mais vezes neste livro.

Apesar de todo sucesso e reconhecimento na área acadêmica, sua vida pessoal teve altos e baixos. No ano de 1804, Gauss se apaixonou perdidamente por uma jovem mulher, gentil e alegre, chamada Johanna Osthoff. Fascinado por ela, Gauss, que na maior parte das vezes se mostrava arrogante e supremamente seguro de si, mostrou-se humilde e autodepreciador.

Carl e Johanna se casaram em 1805. No ano seguinte, eles tiveram um menino que chamaram de Joseph, e em 1808, uma menina, cujo nome dado foi Minna. Infelizmente, a felicidade de Carl e Johanna durou muito pouco. No inverno de 1806, um ferimento de bala de mosquete mata o maior amigo de Gauss, o duque de Brunswick. Gauss estava na janela de sua casa em Göttingen, e só pôde ver uma carroça que passava carregando o corpo de seu amigo e benfeitor mortalmente ferido. Por ironia, mais tarde, Napoleão pouparia a cidade da destruição por causa da presença de Gauss, tecendo o comentário de que "o maior matemático de todos os tempos morava lá".

A morte do duque trouxe dificuldades financeiras para a família de Gauss, mas essas foram as menores. Nos anos que se sucederam, o pai de Carl e seu tio Johann, que o apoiavam, morreram. Em seguida, no ano de 1809, Johanna deu a luz ao terceiro filho do casal, Louis. O nascimento de Minna já tinha sido bastante difícil e com o nascimento de Louis, tanto Johanna quanto o bebê, ficaram gravemente enfermos. Um mês depois, Johanna faleceu. Logo depois, Louis também veio a falecer. Num curto espaço de tempo, a vida de Gauss tinha sido devastada por várias tragédias. E ainda não era tudo, descobrira que Minna, sua filha, também estava destinada a morrer precocemente.

Em meio a tanto horror, Gauss logo se casou novamente e teve mais três filhos, mas, para ele, após a morte de Johanna, a vida nunca mais pareceu lhe trazer alegrias.

Um pouco antes da morte de Gauss, um de seus netos encontrou em uma de suas gavetas uma carta entre os papéis manchada por traços de lágrimas. Nela, seu avô havia escrito: "Triste, eu passo sorrateiramente pelas pessoas alegres que me rodeiam. Se por alguns momentos elas me fazem esquecer minhas tristezas, elas voltam com força dobrada... Até o céu brilhante me entristece..." (MLODINOW, 2005, p. 110).

Para um professor, conhecer a vida de uma das personalidades mais importantes da Matemática pode ser tão útil quanto conhecer sua obra. No cotidiano de sala de aula, o professor se depara com situações em que precisa ser mais que um professor, é necessário ser educador. Saber que grandes gênios também possuem problemas remete-os à sua condição humana e que não são deuses ou extraterrestres. Às vezes, um aluno vem ao professor buscando mais que Matemática, o convívio diário faz com que os alunos sintam intimidade para buscar em professores amparo, conselhos, conforto para as situações da vida. Talvez uma história bem contada como a de Gauss possa ajudar nesses momentos em que devemos ser mais humanos.

RESUMO DO TÓPICO 2

Neste tópico, você acompanhou:

- A vida e a obra de um dos maiores matemáticos da História.

- Como utilizar a história de um grande matemático para introduzir um conteúdo.

- Como trabalhar PA e PG através de uma perspectiva histórica.

- As fórmulas do termo geral e da soma dos termos de uma PA:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

- As fórmulas relativas às PGs:

$$p_n = p_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{p_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}, \text{com } q \neq 1$$

$$S_n = n \cdot p_1$$

$$S = \frac{p_1}{1 - q}$$

- As histórias de superação de matemáticos podem ser tão empolgantes quanto às de um atleta olímpico.

AUTOATIVIDADE

Responda às seguintes questões:

1 Neste tópico, apresentamos alguns dos legados que Gauss deixou para a Matemática. Escreva com suas palavras sobre dois desses legados.

2 Pesquise na internet, em livros de história da Matemática ou em biografias sobre outros feitos de Gauss.

3 Identifique, nas sequências a seguir, quais são PA e quais são PG.

a) (3 ; 7 ; 11 ; 15 ; 19 ; 23)
b) (3 ; 6 ; 12 ; 24 ; ...)
c) (105 ; 99 ; 93 ; 87 ; 81 ; ... ; 3)
d) (5 ; -5 ; 5 ; -5 ; 5 ; -5 ; 5)
e) (21 ; 14 ; 7 ; 0 ; -7 ; ...)

4 Observe a seguinte PA (31 ; 28 ; 25 ; 22 ; ... ; -299) e:

a) Determine o 35º termo.
b) Calcule a soma dos 50 primeiros termos.
c) Descubra quantos são os seus termos.

5 Observe a seguinte PG (9 ; 0,9 ; 0,09 ; ...) e:

a) Calcule qual o 5º termo.
b) Determine a soma dos 100 primeiros termos.
c) Determine a soma dos infinitos termos.

TÓPICO 3

GEOMETRIA ANTIGA

1 INTRODUÇÃO

Quando um tubarão, ao visualizar uma presa, sai em linha reta em sua direção para abatê-la, instintivamente está utilizando o postulado de Euclides, que diz: "A menor distância entre dois pontos é a linha reta que os une". Vimos na Unidade 1 que animais sabem contar, podemos nos arriscar então a afirmar que conceitos básicos de Geometria também fazem parte dos conhecimentos matemáticos dos animais.

Durante a pré-história, os homens foram aprimorando estes conhecimentos instintivos sobre geometria, que o fizeram obter vantagens sobre outros animais, garantindo a sobrevivência da espécie humana. Nesta Unidade, vamos contar um pouco da história antiga da geometria desde a pré-história até a Grécia Antiga.

2 GEOMETRIA NA PRÉ-HISTÓRIA

Não se sabe ao certo quando o homem deixou de utilizar a geometria de forma instintiva, como os outros animais e passou a utilizá-la de forma um pouco mais racional. As suspeitas são inúmeras e dependem da interpretação de cada um. Podemos dizer que ela foi utilizada pela primeira vez na confecção de arcos e flechas utilizados em caçadas, bem como também em armadilhas armadas para capturar animais ou na confecção de redes de pesca.

Em diversos sítios arqueológicos podemos encontrar oficinas líticas, locais onde os homens pré-históricos produziam ferramentas de pedras como machadinhas, pontas de flechas e outros utensílios feitos deste material. Mais um vestígio dos conhecimentos geométricos.

Para se proteger de animais ferozes e do frio, o homem começou a construir cabanas, barracas, ocas e outras formas primitivas de abrigo. Esta prática o fez desenvolver ainda mais os conhecimentos sobre geometria. Ainda para se proteger do frio, a confecção de agasalhos também denota uma gama enorme de conhecimentos geométricos. Em princípio, no corte e costura do couro e, em um momento mais desenvolvido, a confecção de tecido em teares primitivos.

Para controlar as estações de plantio, os primitivos não utilizavam apenas a contagem dos dias. A trajetória da lua e das estrelas no céu e a posição do sol ao nascer ou ao se pôr também auxiliavam na marcação do tempo de colher e de plantar. A observação dos astros também marcava calendários religiosos.

Este tipo de atividade agrícola e cultural também contribuiu e muito para o desenvolvimento da geometria.

A geometria era aplicada ainda em atividades pastoris, no desenvolvimento de currais, mangueiras, cordas, laços e diversas outras ferramentas utilizadas nestas práticas. Também em peças de cerâmica encontradas em diversos sítios arqueológicos, sejam no formato de panelas, vasos para armazenamento de água e alimentos ou como urnas funerárias, utilizadas em rituais de passagem ainda com restos humanos dentro delas.

Estas cerâmicas utilizadas em rituais funerários são muito encontradas no Brasil o que mostra um grande desenvolvimento da geometria aplicada à cerâmica pelos índios brasileiros. Neste contexto, destaca-se a cerâmica marajoara.

3 CERÂMICA MARAJOARA

"Um dos elementos de ação sobre a matéria de que o homem dispõe, excluída a habilidade das mãos e a força dos músculos, é o fogo. As técnicas com emprego do fogo estão na base da metalurgia e da cerâmica" (RIBEIRO, 1995, p. 387). No caso dos grupos indígenas do Brasil, o fogo era usado para fabricação de utensílios cerâmicos, pois a forja do metal não era conhecida.

A fabricação cerâmica de vasos, panelas, tigelas e urnas estão ligadas a necessidades práticas do cotidiano como armazenamento e preparo de alimentos, bem como rituais religiosos. Contudo, havia também as peças decorativas como estatuetas, chocalhos, bonecas para crianças, e até tangas de cerâmica.

O povo Marajoara que habitou a região da floresta Amazônica, especialmente a Ilha de Marajó (Pará), a partir do século I, desenvolveu o mais sofisticado estilo cerâmico da pré-história das Américas. Eles modelavam o barro manualmente através da fabricação de roletes, sem uso de torno de oleiro, e sobrepunham os rolos dando o tamanho e proporção ao objeto pretendido. Feito isso, tratavam a superfície, alisando-a com cuias ou seixos rolados. Em alguns casos, eram agregados ao barro substâncias como cinzas de cascas de árvores e de ossos, pó de pedra e concha e até uma espécie de esponja encontrada sobre a raiz de determinadas árvores, visando aumentar a resistência do barro.

Além do cuidado com a resistência do material empregado para confecção dos utensílios, havia também a preocupação com a decoração dos objetos. Algumas lembram formas animais (zoomórficas), imitando tartarugas, corujas e serpentes, outras lembram homens ou parte deles e há ainda as que mesclam os dois em figuras antropozoomórficas.

FIGURA 28 – PRATO E VASO EM FORMA DE TARTARUGA

FONTE: Disponível em: <http://www.ceramicanorio.com/artepopular/ceramicamarajoara/cer%C3%A2mica_marajoara.htm>. Acesso em: 31 ago. 2010.

A característica marcante da cerâmica Marajoara é a utilização de desenhos gráficos simétricos em que as peças podiam ser trabalhadas com baixo e alto relevo ou entalhes e aplicações. Estas eram divididas em acromáticas (sem uso de cor na decoração, só a tonalidade do barro queimado) e cromáticas (com uso de coloração). As cores eram obtidas com o uso do barro em estado líquido e com pigmentos de origem vegetal. Para o tom vermelho, usavam o urucum, para o branco, o caulim e para o preto, o carvão e a fuligem.

Depois de queimada, em forno de buraco ou em fogueira a céu aberto, a peça recebia uma espécie de verniz obtido do breu do jutaí, material que propiciava um acabamento lustroso.

FIGURA 29 – TIGELA, VASO E TANGA DE CERÂMICA

FONTE: Disponível em: <http://www.icoaraci.com.br>. Acesso em: 31 ago. 2010.

As técnicas complexas de decoração e seus vários estilos sugerem as fases de desenvolvimento desta civilização na região do Pará. A distribuição de estilos tem relação com os diferentes grupos sociais, uma vez que a arte pode ter sido usada para caracterizar, diferenciar e entender as relações entre grupos sociais que se encontram geograficamente separados, mas que têm parentesco em termos culturais. Além de permitir o estudo de seus usos e costumes presentes na decoração como registros cerâmicos de um povo que não possuía escrita, esse trabalho deixa um legado material, de um passado dos quais gerações futuras possam se orgulhar e perpetuar a cultura de seu povo, continuando a prática de tal técnica.

Desta forma, a geometria na cerâmica não está apenas a favor da fabricação de utensílios do dia a dia, mas também da arte, da religiosidade e da hierarquia de cada grupo social.

4 OUTROS POVOS PRÉ-COLOMBIANOS

Além dos índios da foz do Amazonas, outras civilizações também se destacaram nos conhecimentos geométricos, principalmente no sentido prático. Em um estágio mais avançado do que os homens das cavernas, os incas, maias e astecas desenvolveram calendários solares tão precisos quanto os de hoje, baseados principalmente na geometria.

O conhecimento que os incas possuíam sobre geometria era muito superior ao desenvolvimento de seu sistema numérico, já estudado na Unidade 1 deste livro. O observatório de Cuzco era o responsável pela base do calendário incaico – possuía oito torres voltadas para o nascente e outras oito apontando para o poente, com alturas desiguais (duas pequenas intercaladas entre duas bastante altas). Sua sombra projetada no terraço ao redor permitia aos observadores imperiais definirem a exata situação dos solstícios, enquanto as colunas zodiacais (curiosamente semelhantes ao zodíaco caldeu) permitiam definir os equinócios.

As construções encontradas na Cordilheira dos Andes demonstram que este povo dominava a geometria de forma precisa e sofisticada. Além de cidades, completamente feitas de pedras, e de monumentos utilizados em calendários solares, os Incas construíram uma rede pavimentada de estradas que ligava todo o império, desde o norte da Argentina até o Equador, na qual as técnicas de construção mostram um elevado conhecimento sobre geometria.

Os astecas, assim como muitos outros povos pré-colombianos, também conheciam com bastante precisão os fenômenos astronômicos, principalmente aqueles que envolviam o Sol e a Lua. Um dos monumentos documentais, considerado de grande valor utilizado por esta civilização, foi, sem dúvida, a Pedra do Sol, conhecida também como calendário asteca. Foi encontrada em 1790 na cidade do México, por causa das escavações executadas para a reforma dos alicerces antigos da catedral da cidade.

Durante os trabalhos, um enorme bloco de pedra vulcânica, medindo mais de 5 metros de diâmetro por 1 metro de espessura, e pesando aproximadamente 25 toneladas, continha em seu centro a imagem do Sol, representando seus movimentos. Esse círculo provavelmente representava a semana asteca de cinco dias.

Na divisão em oito partes do monolito, observam-se oito ângulos que representam os raios do sol postos em concordância com os pontos cardeais – norte, sul, leste e oeste, evidenciando a boa orientação que os astecas tinham.

FIGURA 30 – CALENDÁRIO ASTECA

FONTE: Novo Milênio. Disponível em: <http://www.novomilenio.inf.br/porto/mapas/nmcalenb.htm>. Acesso em: 23 fev. 2007.

Na borda do disco aparecem duas serpentes fantásticas de fogo, chamadas em asteca por *xiuhcoatl*, dispostas frente a frente e que têm o lábio superior no formato da tromba de um elefante, ornamentado com sete pontos que representam a constelação das sete plêiades. Os 52 anéis das serpentes, que representavam chamas de fogo, enfatizavam os ciclos de 52 anos, no fim dos quais era realizada uma grande cerimônia de renovação do fogo. Este era o momento para que o perdão fosse dado aos inimigos, bem como o perdão das dívidas.

Na cauda das serpentes, está escrita a data 13 *acatl*, data em que se acredita ter terminado a confecção do calendário e do relógio do sol asteca.

Os maias, já mencionados na Unidade 1, também deixaram um impressionante legado arquitetônico, constituído por diversas pirâmides na península de Iucatan na América Central. Estas pirâmides, além de servirem para cerimônias religiosas, eram construídas de forma a orientar o calendário maia. As relações entre engenharia e astronomia mostram quão desenvolvida foi a geometria deste povo.

Nas cidades-estados maias, também se evidencia a preocupação com a coleta da água das chuvas. Como o solo daquela região é muito poroso, a água da chuva logo é absorvida, não formando muitos rios, córregos ou lagos. Por isso, a necessidade do desenvolvimento de sofisticadas técnicas de coleta e armazenamento de água, o que também exigia um apurado conhecimento geométrico.

5 EGÍPCIOS E MESOPOTÂMICOS

As obras deixadas por estes dois povos revelam muito sobre seus conhecimentos de geometria. A integração entre arquitetura, astronomia além de mostrarem muito da religiosidade deste povo, também apresentam conhecimentos práticos que gozavam de conceitos geométricos bem desenvolvidos.

Na Mesopotâmia, a Geometria se apresentava com um aspecto algébrico-aritmético, pois todas as questões tinham caráter numérico. A Geometria era considerada como uma disciplina da vida prática na qual se aplicavam os processos aritméticos. Matemática estava voltada às soluções aritméticas.

Os sumérios, um dos primeiros povos a habitarem a Mesopotâmia, possuíam conhecimentos trigonométricos equivalentes aos dos egípcios. Contudo, uma diferença entre eles era marcante, os mesopotâmicos eram mais desenvolvidos nos cálculos astronômicos e nas pesquisas voltadas à astronomia. Essa dedicação à observação dos astros era justificada pela grande relevância dada aos interesses de ordem astrológica.

Isto os levou a desenvolver um calendário anual com 365 dias, havia também a indução de um dia a mais de quatro em quatro anos, totalizando 25 dias a cada 100 anos. Assim, a duração do seu ano era tão precisa quanto a nossa. O período de translação da lua tinha correspondência com o ano solar, e a mesma precisão, havia somente um erro de apenas um a cada 300 anos.

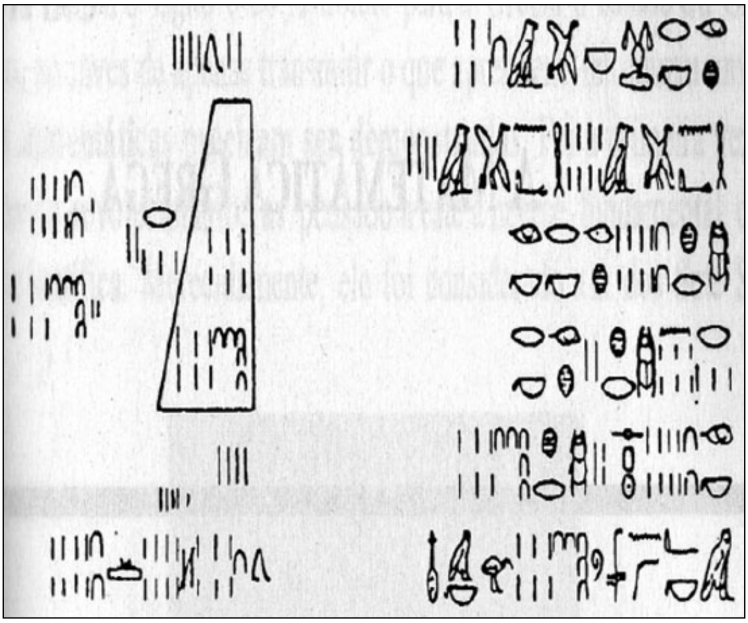
A organização de seu calendário trouxe ainda mais prosperidade ao povo. A distribuição e a estocagem dos alimentos, a divisão das terras, a distribuição de água através de canais e a construção de diques e comportas aumentaram gradativamente a produção de alimentos. Tais soluções não só elevaram o nível de vida dos povos, mas também acarretavam alterações na organização da sociedade. Com o tempo, foram criadas novas profissões tais como, administradores, construtores do bem público e metalúrgicos.

O teorema de Tales, a teoria da semelhança, o teorema de Pitágoras, os triângulos inscritos nos círculos, os cálculos de área de triângulos, quadrados, retângulos, trapézios e o volume de cubos e prismas retos além do valor do PI, que era dado pelo número inteiro três, são alguns dos conceitos geométricos que foram dominados pelos mesopotâmicos.

Enquanto este desenvolvimento se deu entre os rios Tigre e Eufrades, na civilização do Nilo, os egípcios possuíam progresso semelhante. O estudo da astronomia para a manutenção de um calendário agrícola e a construção de diques e canais para a irrigação demonstra que os egípcios tiveram uma Geometria tão desenvolvida quanto à dos mesopotâmicos.

No velho Egito, questões geométricas figuram em textos relativos à Matemática. O papiro de Rhind, já mencionado nesta Unidade, traz onze questões e o papiro de Moscou, seis. Das dezessete questões de Geometria contidas nos papiros, nove pertencem à Geometria plana e estão relacionadas com o cálculo de áreas de triângulos, trapézios e círculos; quando muito, referem-se ao cálculo dos lados do triângulo ou retângulos.

FIGURA 31 – PAPIRO DE MOSCOU



Trecho do papiro de Moscou, com o cálculo do volume do tronco de pirâmide - 1.850 a.C. (Museu de Moscou de Finas Artes).

FONTE: Garbi (1997, p. 13)

Na figura anterior, apresenta-se parte do papiro de Moscou, de 1850 a.C., mostrando o cálculo do volume de um tronco de pirâmide quadrada. Você poderá obter mais informações no volume III do livro “Matemática uma breve história”, de Paulo Roberto Martins Contador (2006). Os demais se referem à Geometria Espacial, aos cálculos dos volumes de figuras como paralelepípedo retângulo, cilindro, tronco de pirâmide e a determinação da área da esfera.

A maior prova dos conhecimentos egípcios sobre geometria são as mais de 200 pirâmides espalhadas em seu território. Elas eram construídas para servirem de tumbas para os faraós. No complexo de Pirâmides de Gizé, próximo à cidade do Cairo, estão as maiores pirâmides do mundo. A maior delas, a Pirâmides de Quéops, possui 148 m de altura e sua base quadrada mede 231 m de lado. Esta pirâmide permaneceu como a mais alta construção feita pelo homem até o século XIX, quando foi ultrapassada por torres de igrejas europeias.

FIGURA 32 – PIRÂMIDES DO EGITO

FONTE: Disponível em: <http://t2.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTueV1yKEUDtE1FevRe7qGMz-7aVgcfmg7kYviYwD5TbrcwADo&t=1&usg=__KSVYFujmDPywftt77cYOvwJlO8s=>. Acessado em: 2 set. 2010.

Este seria um tema muito interessante para trabalhar com os alunos durante os estudos dos sólidos geométricos. Um trabalho extraclasse de pesquisa poderia fazer os alunos buscarem as dimensões das pirâmides na internet ou em bibliotecas e calcularem seu volume e área de superfície.

Na proposta deste trabalho aos alunos, você pode utilizar sua criatividade, no entanto, fica aqui uma sugestão: peça para os alunos formarem grupos de 3 ou 4 alunos. Cada grupo recebe uma pirâmide para pesquisar. Além da história da pirâmide, os alunos deverão buscar as suas dimensões e calcular seu volume e sua superfície. O trabalho pode ser apresentado verbalmente, através de cartazes ou por meio de relatório. Você pode ainda fazer um trabalho interdisciplinar com professores de História e de Geografia sobre este tema.

6 GRÉCIA ANTIGA

Os maiores cientistas do mundo antigo vieram da civilização grega, que surgiu entre os mares Egeu, Jônico e Mediterrâneo, por volta de 2000 a.C., numa reunião de diversas Cidades-Estado formadas a partir das ilhas rochosas e penínsulas no extremo leste do Mar Mediterrâneo. As *polis* (Cidades-Estado) surgiram por volta do século VIII a.C. As duas pólis mais importantes da Grécia foram Esparta e Atenas, onde se desenvolveram as principais ideias da civilização grega.

Para os gregos, a geometria era mais que uma ciência, era a forma de explicar o universo, tanto fisicamente quanto mitologicamente. Era uma religião. Os pitagóricos afirmavam que o próprio Deus, sendo o criador do universo e também do nosso planeta, só poderia ser um geômetra.

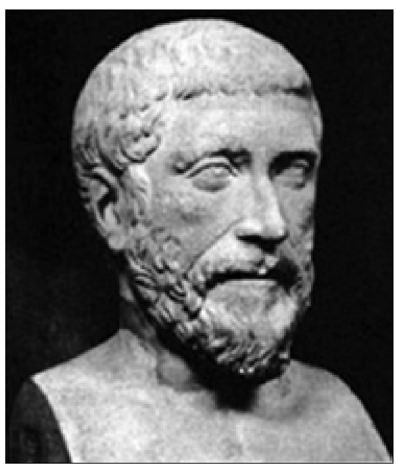
6.1 OS PITAGÓRICOS

Havia muitas escolas na Grécia que tinham o intuito de ensinar métodos de purificação da alma e do corpo. Os métodos eram mantidos em segredo para os novatos. A diferença entre a escola pitagórica e as demais estava nas bases matemáticas e filosóficas defendidas pela escola de Pitágoras. “Os números governavam o mundo” e este era o lema pitagórico. Afinal, os pitagóricos consideravam a aritmética como chave do conhecimento.

Os discípulos da escola pitagórica se dividiam em duas classes: os auditores ou pitagoristas, para quem o ensino era limitado à música, que na época era considerada como a medicina da alma, e a outra, pelos matemáticos ou pitagóricos, iniciados nas primeiras descobertas da escola e nos segredos dos deuses.

Pitágoras, o fundador da escola pitagórica, nasceu na cidade de Somos, próximo a Mileto em 550 a.C. Influenciado por Tales de Mileto, seu amigo, por volta dos 19 anos de idade, Pitágoras se aventurou em uma viagem, o que na época era considerado comum, afinal era através das viagens e dos contatos que elas proporcionavam com outros povos que os indivíduos podiam se desenvolver intelectual e moralmente.

FIGURA 33 – PITÁGORAS DE SAMOS



Pitágoras, de Samos e, depois, Crotona (David Smith Collection).

FONTE: Garbi (1997, p. 16)

O primeiro local visitado por Pitágoras foi a Babilônia, onde conviveu e aprendeu com os sábios. Em seguida, prosseguiu sua viagem, tendo possivelmente ido para a Índia, onde dizem ter permanecido por muitos anos, influenciado pelos pensamentos budistas.

Quando saiu da Índia, dirigiu-se ao Egito, local escolhido novamente pelas sugestões de seu amigo Tales de Mileto. Todavia, ao chegar lá, não encontrou poesia na Matemática egípcia, os objetos geométricos eram entidades físicas. Por isso, dedicou-se ao estudo da Geometria. Retornou à Grécia aos 53 anos, onde fundou a escola que ficou conhecida como Escola Pitagórica.

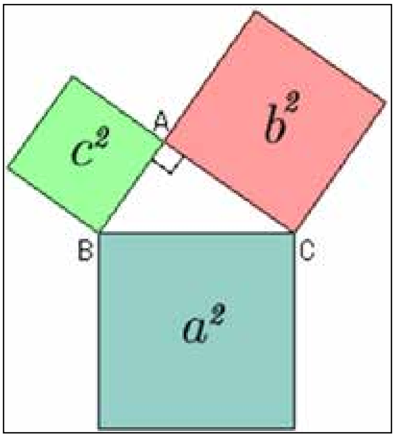
A Escola Pitagórica deu à Geometria o caráter rigoroso da dedução, procurando a solução para problemas por meios abstratos e pela inteligência pura. Também fizeram avanços na Astronomia e na Música.

Um dos problemas para Pitágoras foi a determinação do comprimento da diagonal de um quadrado unitário. Os babilônios calcularam usando seis casas decimais, mas, para Pitágoras, isso não era suficiente. Como já apresentado no tópico 1 desta Unidade, os pitagóricos conseguiram provar que a medida dessa diagonal não poderia ser representada por meio de uma fração, tratando-se de um número irracional.

O fato de que a diagonal de um quadrado não pode ser expressa por qualquer número não soava muito bem para alguém que pregava o princípio de que todas as coisas são regidas por números. Sendo assim, ele deveria rever sua filosofia de que tudo é número, exceto para certas grandezas geométricas que consideramos realmente misteriosas.

Sobre o famoso teorema de Pitágoras, apresentado na próxima figura, não se sabe ao certo sua origem. Alguns pesquisadores supõem que ele tenha aprendido este teorema em sua viagem à Babilônia, outros garantem que se trata de uma descoberta do próprio Pitágoras. Existe ainda a possibilidade de alguns de seus discípulos terem descobertos o teorema e, como o conhecimento era comunitário, atribuiu-se a Pitágoras o feito. Naquela época, muitas destas escolas eram proibidas e seus membros perseguidos. Então é possível que algum pitagórico tenha descoberto o teorema e atribuído o feito a Pitágoras para se proteger de perseguições.

FIGURA 34 – TEOREMA DE PITÁGORAS



FONTE: Disponível em: <http://4.bp.blogspot.com/_Qcwle0T8Iu4/RxVuNAaIcyI/AAAAAAAAAJw/Zne06IWv4QI/s320/pitha1-02.gifv>. Acesso em: 3 set. 2010.

Segundo o teorema, a soma das áreas dos quadrados definidos pelos catetos é igual à área do quadrado definido pela hipotenusa. Desta forma temos que $a^2 = b^2 + c^2$.

O símbolo que identificava a escola pitagórica e seus integrantes é o pentagrama estrelado. Constituía-se de um pentágono regular com suas diagonais, formando uma estrela interna. Sobre este símbolo, falaremos mais no texto complementar.

Depois dos pitagóricos, muitas outras escolas estudaram Matemática e a Geometria. Poderíamos citar os mais famosos filósofos gregos, Sócrates, Platão e Aristóteles, que acreditavam que ninguém poderia ser um filósofo sem antes ser um geômetra. Estes conhecimentos que os gregos desenvolveram durante anos sobre geometria foram condensados por Euclides de Alexandria em uma grande obra intitulada “Os Elementos”.

7 EUCLIDES DE ALEXANDRIA E “OS ELEMENTOS”

Por volta de 300 a.C., no litoral sul do Mar Mediterrâneo, um pouco a oeste do rio Nilo, em Alexandria, Euclides influenciou profundamente a história, tanto que a venda de sua obra apenas foi superada pela da Bíblia Sagrada Cristã. Ainda hoje, “Os Elementos” permanece como o segundo livro mais vendido em todos os tempos. Neste sentido, a história de Euclides é uma história revolucionária, em que se enfatizam os axiomas, os teoremas, as demonstrações, nascendo, assim, a história da própria razão.

FIGURA 35 – EUCLIDES DE ALEXANDRIA

FONTE: Garbi (1997, p. 18)

A famosa obra de Euclides intitulada “Os Elementos” é um livro seriado em 13 volumes. Infelizmente, nenhum dos originais sobreviveu. No entanto, foram transmitidos através de cópias, e, durante a Idade das Trevas, quase desapareceram completamente. É importante observar que Euclides não reivindicou a originalidade em relação a qualquer teorema contido em seus escritos. Ele simplesmente serviu de organizador e sistematizador da Geometria, conforme compreendida pelos gregos. Foi ele quem arquitetou o primeiro relato sobre a natureza do espaço bidimensional, através do raciocínio puro, sem nenhuma referência ao mundo físico.

Como você sabe, a exatidão é uma propriedade exigida em uma demonstração matemática. Mudanças consideradas pequenas podem resultar em sérias consequências. O objetivo de Euclides era o de propor um sistema livre de suposições não reconhecidas, baseadas em intuições, em conjeturas e na inexatidão. Neste propósito, Euclides foi o responsável por 23 formulações de definições, cinco postulados adicionais, chamados de "noções comuns". Baseado nisso, ele demonstrou 465 teoremas que era basicamente todo o conhecimento geométrico da época.

ESTUDOS FUTUROS

Recentemente, no ano de 2008, "Os Elementos", de Euclides, foi traduzido para o português pelo Professor Irineu Bicudo, da Universidade Estadual de São Paulo (UNESP) e publicado pela Editora da mesma instituição. A linguagem utilizada é um pouco difícil, mas para a cultura geral matemática, um professor deveria ler ao menos uma parte desta obra.c

Além desta obra, escreveu pelo menos mais um livro que foi completamente perdido. Falava sobre cônicas que indicavam o estudo de curvas geradas pela intersecção de um plano e um cone. Mais tarde, formou a base da importante obra de Apolônio, o que fez progredir substancialmente as ciências da navegação e Astronomia.

Como professor de Matemática em Alexandria, Euclides lecionou para ninguém menos que Arquimedes de Siracusa, considerado o maior gênio matemático do mundo antigo e um dos três grandes matemáticos de todos os tempos.

8 ARQUIMEDES DE SIRACUSA

Arquimedes, nascido em 287 a.C., na cidade de Siracusa, uma ilha da Sicília, foi o maior gênio da Antiguidade. Seus feitos na Matemática e na Física foram dignos de grande admiração. Arquimedes era dotado de excepcional habilidade na engenharia e na construção de sofisticados mecanismos. Sua capacidade de trabalho, assim como a originalidade de suas ideias e a profundidade, clareza e rigor de seus raciocínios eram surpreendentes. Várias de suas obras chegaram até nós exatamente como foram escritas, ou com pequenas distorções. Podemos encontrá-las em edições modernas como: Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas, Sobre a Esfera e o Cilindro, Sobre Corpos Flutuantes, Sobre Espirais. A Quadratura da Parábola, Sobre Conoides e Esferoides, A Medida de um Círculo, O Contador de Grãos de Areia e O Método. Alguns de seus trabalhos foram perdidos, dentre eles um sobre Mecânica (Sobre Alavancas e Sobre Centros de Gravidade), um sobre Óptica, um denominado Sobre o Calendário e outro denominado Sobre a Construção de Esferas.

FIGURA 36 – ARQUIMEDES DE SIRACUSA

FONTE: Eves (2004, p. 192)

É também atribuída a Arquimedes a melhor aproximação do PI da idade antiga. Após observar diversos polígonos regulares inscritos e circunscritos em círculos, concluiu que a razão entre o raio e o perímetro de uma circunferência está entre 22/7 e 220/71. O parafuso e máquinas de elevar água também são invenções de Arquimedes.

Muitas histórias e lendas circundam a vida e a obra deste grande matemático, entre elas está o caso da coroa do rei de Siracusa e o da famosa frase "dê-me um ponto de apoio e moverei a Terra". Todas estas histórias ou lendas você pode encontrar no livro: "Arquimedes, Uma Porta Para a Ciência" da autora Jeanne Bendck. Dentre elas, uma das que mais chama a atenção é o da sua participação na Segunda Guerra Púnica, que culminou em sua lamentável morte.

Em 218 a.C. começou a Segunda Guerra Púnica. Aníbal conduzira seus elefantes para além dos Alpes e, após derrotar vários exércitos romanos, infligiu a Roma uma tremenda derrota. Geron morreu em 215 a.C., deixando o trono ao neto de 15 anos, Gerônimo. Aconselhado pelo tio, do partido pró-cartaginês, Gerônimo cancelou a aliança com Roma. A decisão foi um desastre: ele foi assassinado com os familiares pelo partido pró-romano em 214 a.C. e Siracusa viveu uma guerra civil rapidamente concluída com a vitória dos filocartagineses. No entanto, Roma não podia assistir a tudo passivamente, em 213 a.C., o general romano Marco Cláudio Marcelo começou o ataque a Siracusa. Uma frota de 60 embarcações atacou a cidade a partir do mar, enquanto que o exército a cercava por terra.

O papel de Arquimedes nesse ataque é um fato histórico que escapa à vagueza das lendas e anedotas. Encontramos sua narração em Políbio (200 a.C. - 118 a.C.), que pode ter tido acesso a fontes diretas, Tito Lívio (59 a.C. - 17 d.C.) e Plutarco. Arquimedes assumiu a direção das operações de defesa. Siracusa estava bem protegida por um muro no lado do mar e, no interior, pela própria natureza do terreno, bastante íngreme e difícil de escalar, exceto em alguns pontos, cuja proteção Arquimedes providenciou. Marcelo comandava as operações marítimas, mas, assim que suas embarcações se aproximavam, eram atingidas por tiros de catapultas de diversas dimensões e alcance. Como se não bastasse, Arquimedes ordenou a construção de gruas giratórias que deixavam cair enormes massas sobre as embarcações que se aproximavam e da famosa *manus ferrea*, uma espécie de artefato de ferro que agarrava os navios pela proa e os afundava. Os soldados romanos estavam aterrorizados e fugiam assim que viam um dispositivo de madeira apontar por trás do muro.

As coisas não foram melhores no ataque por terra, a tal ponto que os romanos decidiram interromper a investida e tentar derrotar Siracusa pela fome. Naturalmente, nesses casos, história se funde com lenda. Alguns séculos depois de Políbio e Lívio, surgiram na literatura os espelhos ardentes com os quais Arquimedes teria queimado os navios romanos. Sabe-se que não se podia tratar de espelhos parabólicos, já que a parábola concentra os raios muito próximos, mas isso não impediu o desenvolvimento de uma impressionante literatura sobre o tema. O mérito desse mito foi o de desenvolver pesquisa sobre as propriedades ópticas das secções cônicas e, naturalmente, acrescentar outro traço pitoresco à figura de Arquimedes.

No século XVIII, Buffon ainda experimentava um sistema de espelhos planos para queimar objetos a distâncias razoáveis. Em 212 a.C. as tropas romanas invadiram e saquearam a cidade. Parece que Marcelo era contrário ao saque, mas foi obrigado a ceder em razão da avidez de seu exército, ansioso para se apoderar das riquezas de Siracusa. Ele havia, porém, dado ordens precisas: Arquimedes devia ser poupado. Entretanto, um soldado romano (conta Lívio) que saqueava as casas encontrou Arquimedes por acaso. O sábio estava tão absorto no estudo de algumas figuras geométricas que ignorava o que se passava. O soldado, não sabendo de quem se tratava, matou o homem. Plutarco fornece versões um pouco diferentes: o soldado teria se aproximado e ordenado que Arquimedes se apresentasse a Marcelo, mas ficou furioso ao ouvir, como resposta, que deveria aguardar a solução de um problema geométrico. Uma variante sustenta que o legionário logo o ameaçou de morte quando Arquimedes solicitou-lhe um tempo para acabar uma demonstração. Segundo outra versão, Arquimedes foi morto enquanto se dirigia a Marcelo com uma caixa de instrumentos que teria provocado a cobiça dos saqueadores.

Foi um final triste: um dos maiores gênios da humanidade foi trucidado por um legionário tosco e ignorante. Consola um pouco pensar que Arquimedes morreu enquanto se dedicava à sua musa, a sereia que o fazia esquecer de todo o resto. Marcelo ficou profundamente triste e ordenou que os familiares de

Arquimedes fossem protegidos e que a sepultura fosse providenciada. Na tumba, conforme o sábio solicitara, foi posta uma esfera inserida em um cilindro, com a inscrição da relação entre os dois sólidos, uma de suas maiores descobertas matemáticas.

RESUMO DO TÓPICO 3

Neste tópico, você acompanhou:

- O surgimento da geometria na Pré-História.
- Que a Cerâmica Marajoara é uma das mais antigas expressões geométricas dos índios brasileiros.
- A Astronomia e a Astrologia fizeram diversos povos desenvolverem a geometria.
- O papiro mais antigo do mundo foi encontrado no Egito e trata, entre outras coisas, sobre geometria.
- As Pirâmides do Egito podem servir de tema para um trabalho extraclasse e interdisciplinar.
- A segunda obra mais vendida em todos os tempos são “Os Elementos” de Euclides.
- A vida e a obra de Pitágoras de Crótona e Arquimedes de Siracusa.

AUTOATIVIDADE

Responda às seguintes questões:

1 Em quais atividades do cotidiano os homens aplicavam a geometria durante a Pré-História?

2 Quais objetos de cerâmica eram produzidos pelos marajoaras?

3 Faça uma pesquisa e calcule a superfície e o volume da Pirâmide de Quéops.

4 Como os babilônicos utilizavam a geometria na agricultura?

5 Qual escola grega começou a estudar geometria com objetivo filosófico e não meramente prático?

6 Qual a grande contribuição de Euclides para a geometria?

7 Por que Arquimedes é considerado por muitos como o maior matemático da Antiguidade?

8 Em um segmento de reta AB, de medida igual a 10 cm, será marcado um ponto C, que o divide em média e extrema razão. A quantos centímetros C deve estar de A?

TÓPICO 4

GEOMETRIA MODERNA

1 INTRODUÇÃO

Durante a Idade Média, a Europa experimentou o que os historiadores chamam de Milênio da Escuridão. Neste milênio muitas obras dos antigos sábios gregos foram destruídas. As que sobreviveram foram salvas em alguns mosteiros ou pelos sábios árabes que foram os responsáveis pela manutenção da ciência grega.

2 GEOMETRIA NAS ARTES RENASCENTISTAS

Durante o renascimento, os quadros de grandes gênios da pintura foram os que mais se destacaram nas artes desse momento da história da humanidade. Graças à utilização de conceitos geométricos, como ponto de fuga e proporcionalidade, os quadros ficaram caracterizados pela perfeita noção de perspectiva.

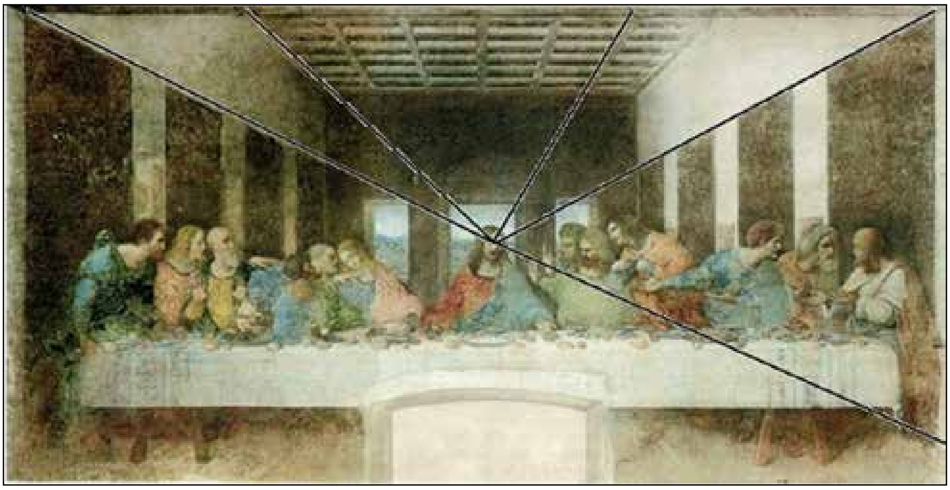
Observe o famoso quadro "A Última Ceia" de Leonardo da Vinci. Note que as paredes da sala, o teto, as janelas laterais, dão noção de profundidade ao espaço, o que caracteriza a perspectiva.

FIGURA 37 – A ÚLTIMA CEIA DE LEONARDO DA VINCI

FONTE: Disponível em: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/08/Leonardo_da_Vinci_%281452-1519%29_-_The_Last_Supper_%281495-1498%29.jpg>. Acesso em: 9 set. 2010.

A noção de profundidade é conferida respeitando a proporção de cada figura na distância que existe entre ela e o observador. As linhas retas sobrepostas a este quadro mostram que o pintor utilizou conhecimentos geométricos para conferir à obra esta sensação.

FIGURA 38 – "A ÚLTIMA CEIA" DE LEONARDO DA VINCI COM LINHAS DE PERSPECTIVA



FONTE: Adaptado de: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/08/Leonardo_da_Vinci_%281452-151v9%29_-_The_Last_Supper_%281495-1498%29.jpg>. Acesso em: 9 set. 2010.

Observe que o ponto de fuga é na cabeça de Jesus Cristo, pois todas as linhas de perspectiva partem dela em direção ao lado do quadro.

Quadros pintados antes do período renascentista não possuíam noções de perspectiva. Podemos dizer então que se trata de um dos maiores avanços artísticos que se deu nesse tempo, graças ao desenvolvimento da Geometria.

Aqui existe novamente um tema interessante que pode ser trabalhado de forma interdisciplinar com a disciplina de Artes.

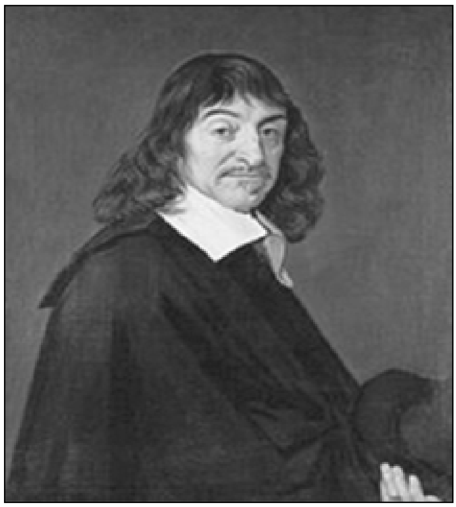
3 GEOMETRIA NO PLANO CARTESIANO

Foi também nessa época que dois grandes matemáticos desenvolveram a Geometria Analítica ou Geometria Cartesiana, René Descartes e Pierre de Fermat.

René Descartes, nascido em 31 de março de 1596, era um bebê fraco e doentio. Alguns dias após seu nascimento, sua mãe veio a falecer, vitimada por uma tuberculose. O doutor previu o mesmo fim ao bebê. Contudo, ele se manteve vivo graças aos cuidados do pai e de uma enfermeira.

Quando Descartes completou 8 anos, foi mandado para uma escola jesuíta chamada de La Fleche. Em pouco tempo se tornou muito famoso. Graduou-se em Leis e em Filosofia. Sua mente filosófica o fez caminhar na busca pela verdade, questionando ceticamente tudo que lhe fora apresentado como estabelecido. Interessou-se por Geometria e, por isso, acabou por conhecer os melhores matemáticos franceses da época. Sua paixão pela matemática era puramente cultural, interessando-se pela investigação do mundo, exatamente como aconteceu com Platão.

FIGURA 39 – DESCARTES



FONTE: Cajori (2007, p. 249)

Terminados os seus estudos, Descartes se mudou para Paris, onde passava as noites vagando pelo grande círculo social da época e, durante o dia, ficava na cama estudando o que mais gostava: Matemática. Esta situação logo se tornou tediosa e ele resolveu alistar-se no exército. Seus dias a serviço do governo serviram para que ele conhecesse muitos matemáticos nas cidades onde seu exército passava e produzisse muita riqueza matemática.

Utilizando seu método geométrico, conseguiu facilmente resolver um problema proposto por um amigo holandês que conheceu quando servia o exército. Empolgado com a facilidade com que conseguira resolver o problema, resolveu publicar um livro chamado "*La Géométrie*" onde divulgou seu desenvolvimento sobre geometria analítica.

Descartes não tinha nenhuma vergonha em tentar encontrar um sistema diferente que pudesse auxiliá-lo na hora de demonstrar algum teorema geométrico, para que, assim, não precisasse se utilizar dos argumentos gregos.

Durante toda a sua vida, Descartes teceu várias críticas sobre as obras gregas em geral, mas a Geometria Grega, em particular, era o que mais lhe aborrecia. Para ele, ela podia ficar tão complicada a ponto de dificultar desnecessariamente a solução do problema. A crítica de Descartes se estendia às demonstrações. A respeito delas, ele escreveu: "tais demonstrações só podem ser superadas sob a condição de cansar imensamente a imaginação". As curvas eram outro fator de desaprovação para Descartes. Segundo ele, falar a respeito de uma curva de forma descritiva pode ficar cansativo e acabar tornando a demonstração enfadonha.

Em "*La Géométrie*", Descartes apresenta a Geometria Analítica como forma de resolver problemas algébricos. É muito comum afirmarem em livros de Matemática que Descartes transformou Geometria em Álgebra, mas na verdade o que ele fez foi o contrário, transformou Álgebra em Geometria, com o objetivo de resolver equações e efetuar operações aritméticas. O primeiro a associar figuras geométricas e equações algébricas foi Fermat.

Pierre de Fermat também era francês, formado em Direito, trabalhou muitos anos no parlamento de Toulouse. Possuía como *hobbie* a literatura clássica, por onde a Matemática entrou em sua vida. Podemos seguramente afirmar que a obra de Descartes não influenciou, pelo menos não inicialmente, a obra de Fermat, então este é mais um caso de descobertas simultâneas, feitas por pessoas diferentes. É lógico que os dois estilos não eram idênticos, nem permaneceram inertes um ao outro, já que os dois foram contemporâneos. Aos poucos, eles foram se fundindo e atualmente podemos ver características de ambos no que chamamos de Geometria Analítica.

Descartes é o pai dos eixos x e y (porém apenas do primeiro quadrante do plano cartesiano) e da moderna notação de potência, Fermat foi quem a definiu pela primeira vez a equação da reta, da parábola da elipse e da hipérbole.

FIGURA 40 – PIERRE DE FERMAT

FONTE: Disponível em: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/bd/Pierre_de_Fermat_%28F._Poilly%29.jpg/514px-Pierre_de_Fermat_%28F._Poilly%29.jpg>. Acesso em: 9 set. 2010

Depois que Descartes e Fermat romperam com a Geometria Euclidiana, o caminho ficou aberto para que a Geometria pudesse ser vista de outras formas. Isso fez com que outros matemáticos conseguissem provar que os três grandes problemas da geometria clássica grega eram insolúveis utilizando apenas régua e compasso.

4 OS TRÊS PROBLEMAS DA GEOMETRIA CLÁSSICA GREGA

Os geômetras da Grécia Antiga conseguiram demonstrar diversos teoremas utilizando apenas os instrumentos euclidianos: a régua e o compasso sem graduação. Apesar de todos os esforços das mais geniais mentes do mundo grego, ficaram para trás três problemas que não foram solucionados através da geometria euclidiana:

- a quadratura do círculo;
- a duplicação do cubo;
- a trissecção do ângulo.

4.1 A QUADRATURA DO CÍRCULO

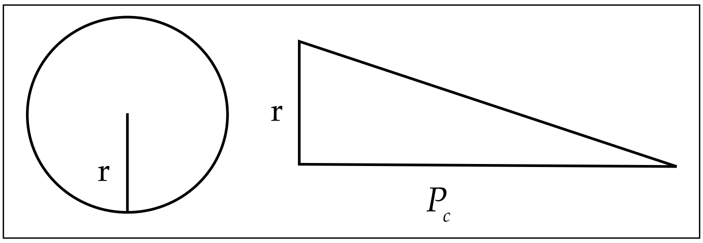
O mais antigo dos problemas tratava sobre a quadratura do círculo, que já era conhecido pelos babilônios, egípcios e chineses. No papiro de Rhind, o problema de número 50 pede que seja encontrado um quadrado que tenha a área igual à de um círculo dado.

A resposta a este questionamento levou a Grécia a uma revolução. As diversas tentativas de prova deste problema ocasionaram um desenvolvimento notável na geometria da época. Alguns exemplos deste desenvolvimento estão no surgimento dos estudos das secções cônicas, no desenvolvimento dos estudos com curvas cúbicas, nas quárticas e transcendentais, como a quadratriz inventada por Hípias em 425 a.C., a espiral de Arquimedes, a cissoide de Diócles, a conchoide de Nicomedes em 240 a.C., entre muitos outros.

Já no ano de 1800 a.C., os egípcios pensaram tê-lo resolvido, afinal podemos encontrar no papiro de Rhind o resultado $L = \frac{8}{9}D$, em que L indica o lado de um quadrado e D o diâmetro de um círculo. O primeiro grego a se interessar por esse problema foi Anaxágoras 440 a.C., que, apesar de se encontrar preso por motivos políticos, dizem ter forrado as paredes da prisão de tantos cálculos, todos em vão. Logo depois, foi Hipócrates, responsável por obter a primeira quadratura de uma figura curva, as *lúnulas* ou *lua crescente*. Empolgado por isso, achou que seria fácil solucionar o problema da quadratura do círculo, mas infelizmente o seu otimismo não foi suficiente.

Vários outros matemáticos dedicaram muito tempo de suas vidas à solução desse problema. Aqui vamos nos reter apenas a uma das propostas de argumentação de Arquimedes, a que falava sobre a possibilidade de existir um triângulo retângulo, cuja área seria igual à área de um círculo dado.

FIGURA 41 – MÉTODO DE ARQUIMEDES

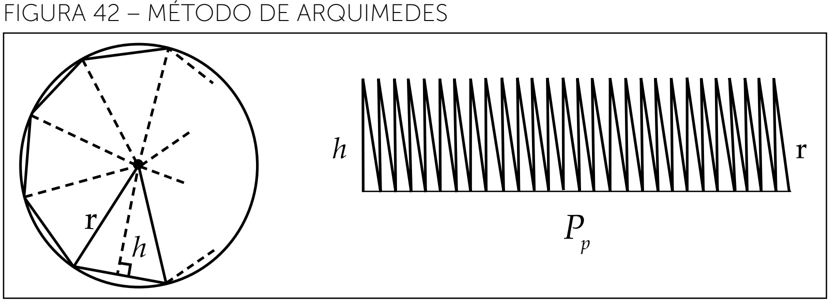


FONTE: Contador (2006, p. 245)

Conhecemos um triângulo retângulo e sabemos também que sua área é igual ao semiproduto dos catetos (a, b) ou $S = \frac{a \cdot b}{2}$. Para Arquimedes, a área de qualquer círculo poderia ser expressa pela área de um triângulo retângulo de lados r e P_c, representando respectivamente raio e perímetro do círculo.

Para os geômetras gregos, a razão entre o perímetro e o raio do círculo $\left(\pi = \frac{p_c}{r}\right)$ originava um número irracional e, por isso, eles não concordavam com esta ideia. Sendo assim, um triângulo como o proposto por Arquimedes não poderia existir. Foi então que Arquimedes, utilizando-se de seus argumentos, mostrou que, sendo a área do triângulo $S_t = \frac{P_c \cdot r}{2}$ e a área do círculo S_c, suponha hipoteticamente que $S_c > S_t$. Logo $S_c - S_t = K > 0$.

FIGURA 42 – MÉTODO DE ARQUIMEDES

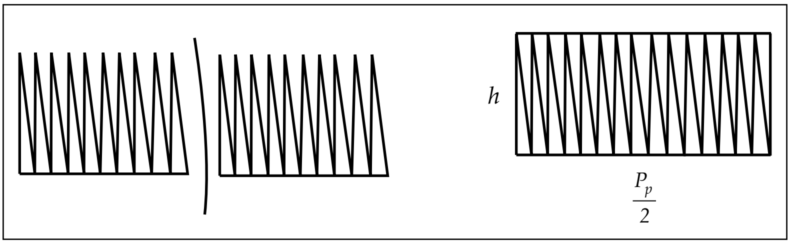


FONTE: Contador (2006, p. 246)

Dentro do círculo de raio r, inscreve-se um polígono de n lados. Fica fácil perceber que quanto maior for o número de lados do polígono, mais próxima será sua área e a do círculo, mas, mesmo assim, o círculo permanecerá tendo área maior. No entanto, devido ao grande número de lados do polígono, dizemos que as áreas são praticamente iguais. Temos aqui um alicerce suficiente para afirmar que a área do polígono é maior que a área do triangulo, $S_p > S_t$. Assim, já que partimos da hipótese de que $S_c > S_t$, podemos concluir que $S_c > S_p > S_t$ e $S_c - S_p = K_1$, desta forma, $K_1 < K$ e a área do polígono de perímetro P_n é a soma das áreas de n triângulos retângulos de altura h e hipotenusa r.

Se abrirmos o polígono como se este fosse uma laranja, cortando-o bem ao meio, esta série de triângulos se encaixará formando um retângulo de lado h e $\frac{P_p}{2}$.

FIGURA 43 – MÉTODO DE ARQUIMEDES



FONTE: Contador (2006, p. 247)

A área do retângulo dará exatamente a área do polígono $S_p = \frac{P_p}{2} \cdot h$. Observando as anotações anteriores, veremos que a área inicial do triângulo era $S_t = \frac{P_c r}{2}$ e, então, $S_p > S_t$, ou $P_p.h > P_c.r$. Quando comparamos r e h, vemos que r sempre atinge a circunferência do círculo, enquanto que h atinge somente o lado do polígono. Logo r > h e o perímetro do círculo é maior que o perímetro do polígono, uma vez que ele está inscrito e, consequentemente, a área do polígono é menor que a área do triângulo. Todavia, se observarmos novamente nossas anotações, veremos que ainda há pouco chegamos à conclusão de que a área do polígono era maior do que a área do triângulo, gerando uma contradição. Este é modo de resolver alguns problemas, em que se prova primeiro que o argumento não pode ser maior e depois se faz o contrário, provando que o argumento não pode ser menor, induzindo a conclusão de que então só pode ser igual, era um raciocínio desenvolvido por Hipócrates, muito utilizado entre os gregos, e era conhecido como *reductio ad absurdum* ou prova por contradição.

Sendo assim, concluímos que nossa hipótese inicial, $S_c > S_t$, não é verdadeira, e podemos encerrar a demonstração concluindo que as duas áreas são iguais. Apesar da criatividade de Arquimedes, esta solução não pode ser feita utilizando apenas régua e compasso.

4.2 A DUPLICAÇÃO DO CUBO

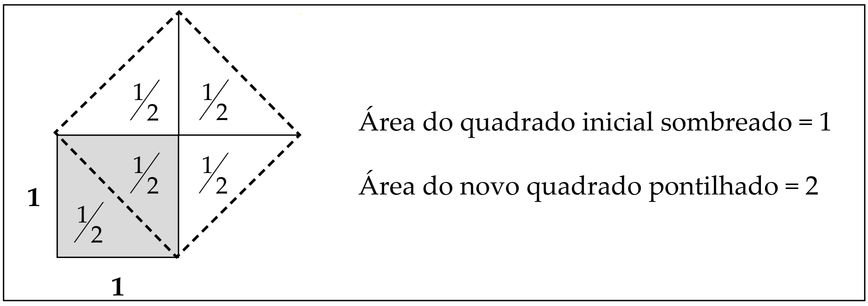
Uma versão antiga sobre o aparecimento de tal problema fala que ele está relacionado com a mitologia grega, em um período em que Atenas foi invadida por uma peste, diminuindo cerca de um quarto de sua população, vitimando até mesmo Péricles.

Desesperados, os habitantes enviaram uma delegação que visava buscar o auxílio do Templo de Apolo para a ilha. Neste templo, existia um altar em forma de cubo e, em troca do fim da peste, a divindade pediu que fosse erguido o altar de modo que este fosse o dobro do altar já existente. Segundo a divindade, assim a peste iria cessar.

A princípio, parecia ser um problema de fácil solução, mas o cubo tinha arestas de tamanho 1, consequentemente, seu volume será dado por $V = 1 \times 1 \times 1 = 1\ m^3$. A simples duplicação de suas arestas daria o volume $V = 2 \times 2 \times 2 = 8\ m^3$, sendo assim, o novo cubo teria um volume igual a 8 vezes o cubo original, enquanto que se esperava obter um cubo com $2\ m^3$ de volume. Então, qual seria o tratamento da nova aresta?

Duplicar um segmento de reta é muito fácil, afinal um quadrado no plano duplica-se facilmente, quando dado um quadrado de lado igual a 1. Neste caso, o problema é resumido em achar um segmento de reta cujo comprimento seja $\sqrt{2}$, porém esse segmento nada mais é que a própria diagonal do quadrado. Neste caso, basta construir um novo quadrado fazendo a diagonal ser um novo lado.

FIGURA 44 – A DUPLICAÇÃO DO CUBO



FONTE: Contador (2006, p. 233)

No plano era fácil duplicar o quadrado, mas e no espaço? Na época era impossível conseguir duplicar o cubo. Para que o cubo seja duplicado, é necessário que seja encontrada uma aresta a que satisfaça a condição $a \cdot a \cdot a = 2$ ou $a^3 = 2$. Quando extraímos a raiz cúbica do número 2, percebemos que não se trata de um número inteiro, e novamente nos encontramos em um grande impasse, ou usamos $a = 1{,}2$ um valor que é muito pequeno comparado com o resultado desejado ($1{,}2^3 = 1{,}728$) ou podemos usar $a = 1{,}3$ e aí novamente temos problemas, porque agora o número ficou muito grande ($1{,}3^3 = 2{,}197$).

Os maiores matemáticos da Grécia passaram séculos tentando resolver o problema de Delos. Na verdade, era um problema tão difícil que os deuses não tinham mesmo solução para o fim da peste. A busca pela solução deste problema, nas condições dadas, acabou por se constituir no primeiro grande fracasso matemático.

Ainda na visão de Contador (2006), existe outra versão para o surgimento deste problema. Segundo ele, Eutócio (560 d.C.) cita uma carta escrita por Eratóstenes ao rei Ptolomeu I, em que este fala sobre o descontentamento do rei Minos com relação ao tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco. A tumba cúbica construída teria ficado pequena demais, então Minos ordenou que seu tamanho fosse dobrado e, por sugestão de Eurípedes, poeta sem nenhum conhecimento matemático, o lado do cubo, foi dobrado. Eratóstenes conseguiu verificar que aquele procedimento estava incorreto, pois a área da tumba ficaria quatro vezes maior enquanto que seu volume seria oito vezes maior. Neste sentido, não houve duplicação.

Um pouco mais tarde, o problema não ficaria restrito apenas ao cubo com arestas iguais a 1, mas transformou-se em um grande desafio que buscava a generalização da duplicação do volume de um sólido qualquer, de forma a conservar sua forma original.

Contador (2006) afirma também que, independente da história que seja considerada verdadeira, o que importa foi a repercussão, de modo que o problema chegou até a academia de Platão, e lá foram sugeridas algumas alterações, surgindo, assim, soluções geométricas propostas por Eudóxio, Menaecmus e pelo próprio Platão.

O problema de Delos é resumido em encontrar a raiz cúbica do número dois, que nos dá como resultado um número irracional. Assim, a solução só é possível de forma aproximada, é um segmento de reta que pode ser traçado, mas que não pode ser medido.

Podemos afirmar com certeza, fundamentando-nos em Contador (2006), de que a resposta existe, porém com um número infinito de casas decimais. Infelizmente, todas as tentativas foram frustradas e não pararam com os gregos. Matemáticos do século XVII, como Christian Huygens, René Descartes, Grégoire de Saint-Vicent e o próprio Newton, trabalharam para solucionar o problema.

4.3 A TRISSECÇÃO DO ÂNGULO

O último dos três problemas impossíveis de se solucionar usando apenas as ferramentas euclidianas é a trissecção do ângulo.

Segundo Contador (2006), a trissecção do ângulo ou a divisão de um ângulo em três ângulos iguais parece-nos o mais fácil e simples de todos os já mencionados problemas, pois a facilidade da bissecção nos induz a tal pensamento. Tem também alguns ângulos especiais, como é o caso do ângulo de 90º e todos os seus múltiplos, estes podem ser facilmente trisseccionados.

Talvez a origem desse problema esteja ligada às tentativas realizadas pelos gregos para construírem polígonos com nove lados, fazendo-se necessária a trissecção do ângulo de 60º para se obter um ângulo de 40º, resultado da divisão de 360º por 9. Com esta tentativa, chega-se ao segundo grande fracasso. Afinal, não é possível trisseccionar um ângulo com exatidão trabalhando apenas com instrumentos euclidianos, apesar deles nos fornecerem uma aproximação muito boa.

5 GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Com certeza, um dos primeiros a vislumbrar uma geometria não euclidiana foi Carl Friedrich Gauss. Aos 12 anos, Gauss começou a criticar "Os Elementos", de Euclides. Ele focalizou, assim como outros já tinham feito, o quinto postulado, aquele que fala sobre as paralelas. Todavia, a sua crítica era nova e herética. Diferente dos demais críticos, Gauss não procurou encontrar uma forma mais aceitável para o postulado. Em vez disso, questionou sua veracidade. Então ele se fez a seguinte pergunta: "*Será possível que o espaço seja de fato curvo?*"

Aos 15 anos, Gauss tornou-se o primeiro matemático na história a aceitar a ideia de que poderia existir uma Geometria logicamente consistente, para a qual o postulado das paralelas prescrito por Euclides não valeria.

É uma pena que Gauss não julgou importante este raciocínio, não o tendo publicado. Ao contrário de Gauss, o russo Nicolai Ivonovich Lobachewsky aprofundou seus estudos nesta área, sendo atualmente reconhecido como pai da geometria não euclidiana. Em sua obra, ele propõe uma nova geometria, denominada atualmente de Geometria de Lobachewsky, mas que ele chamou na época de Geometria Imaginária.

> [...] no Kazan Messenger, de 1829, Lobachewsky publicou um artigo "Sobre os Princípios da Geometria", que marca o nascimento oficial da Geometria Não Euclidiana. Entre 1826 e 1829, tinha ficado absolutamente convencido de que o quinto postulado de Euclides não pode ser provado com base nos outros quatro, e, no artigo de 1829, tornou-se o primeiro matemático a dar o passo revolucionário de publicar uma geometria especificamente baseada numa hipótese em conflito direto com o postulado das paralelas: por um ponto C fora de uma reta AB podem ser traçadas mais de uma reta no plano que não encontram AB. Com este novo postulado, Lobachewsky deduzia uma estrutura geométrica harmoniosa sem contradições lógicas inerentes.

FONTE: Boyer (2006, p. 360)

Após Lobachewsky, outro que impulsionou a Geometria Não Euclidiana foi G. F. B. Riemann. A sua visão sobre Geometria era mais ampla que a de Lobachewsky e baseava-se na métrica aplicada a cada tipo de geometria. Segundo Boyer (2006, p. 377), temos:

> Entre as regras mais importantes em qualquer geometria, Riemann percebeu esta regra para achar a distância entre dois pontos que estão infinitesimalmente próximos um do outro. Na Geometria Euclidiana Ordinária, esta "métrica" é dada por $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; mas uma infinidade de outras fórmulas podem ser usadas como fórmula da distância, e naturalmente a métrica usada determinará as propriedades do espaço ou da geometria.

Nesta proposta, as geometrias Euclidianas e de Lobachewsky fazem parte da Geometria Riemanniana. Cada geometria pode ser atrelada a uma superfície diferente. O próprio Riemann propôs uma geometria sobre a curvatura gaussiana e outra sobre uma esfera denominada Geometria Geodésica.

RESUMO DO TÓPICO 4

Neste tópico, você acompanhou:

- A importância da geometria para a arte renascentista.

- O início da Geometria Analítica e a revolução do método de resolver problemas geométricos.

- Os três problemas que os gregos não conseguiram resolver e que após a Idade Média conseguiram provar a impossibilidade de resolução por métodos euclidianos.

- O surgimento das geometrias denominadas não euclidianas.

AUTOATIVIDADE

1 Procure em livros, galerias de arte ou na internet obras em perspectiva e tente traçar as linhas para encontrar o ponto de fuga.

2 Pesquise sobre Echer, artista genial que aplica perspectiva em sua obra para causar ilusão de ótica.

3 Vimos que a trissecção de um ângulo qualquer não é possível utilizando apenas régua e compasso, porém existem alguns casos especiais em que isto é possível. Um destes casos especiais é o ângulo de 90º. Pegue uma régua e um compasso e tente fazer a trissecção de um ângulo de 90º. Lembre-se, não vale utilizar transferidor nem esquadro de 30º, 45º e 60º.

HISTÓRIA DA ÁLGEBRA

1 INTRODUÇÃO

A história da álgebra é quase tão antiga quanto a história da aritmética. Segundo Cajori (2007, p. 21), "na Babilônia, entre 1800 a.C. e 1600 a.C., já existia uma classe de escribas treinados para resolver problemas matemáticos que envolviam equações lineares em duas ou mais variáveis, equações do 2º grau e coisas afins." Naturalmente, estas equações eram voltadas a aplicações. Não possuíam nenhum dos símbolos utilizados atualmente em matemática, como o sinal de igual, a potência ou os símbolos operacionais.

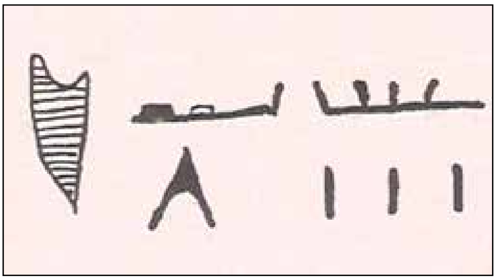
As questões eram colocadas da seguinte forma: qual o número que multiplicado por 3 e depois somado com 2 resulta em 17? Para resolver, seguia-se uma série de passos como uma receita de bolo: Subtraia 2 de 17, em seguida divida o resultado por 3, o valor do número desconhecido é 5. Isto equivale a uma equação do 1º grau que atualmente é escrita da seguinte forma:

$3x + 2 = 17$
$3x = 17 – 2$
$x = 15 \div 3$
$x = 5$

Apesar da falta de símbolos da álgebra babilônica e seu método próprio de resolução, não é perdida a noção de incógnita nem a generalidade. Os egípcios também tiveram sua álgebra própria, denominado método da falsa posição. Muitos livros didáticos apresentam equações escritas por povos antigos como desafios para os estudantes. Um exemplo é o livro "Tudo é Matemática 7ª série" (DANTE, 2005, p. 146) no qual é apresentado o desafio da seguinte forma:

> Uma equação egípcia: na figura seguinte, podemos observar uma equação escrita por um matemático egípcio 30 séculos antes de Cristo. Os hieróglifos indicam (aproximadamente) o problema: "Qual é o número cuja metade mais a terça parte é igual a 5?" É uma equação dos tempos dos faraós. Resolva-a.

FIGURA 45 – EQUAÇÃO EGÍPCIA



FONTE: Dante (2005, p. 146)

Brincadeiras como estas podem ser encontradas em diversos livros didáticos. Mesmo em escolas onde o livro de Matemática não privilegia esta prática, os professores podem sugerir aos alunos desafios encontrados em outros livros, enriquecendo não só o ensino de equações, mas também a de outros conteúdos. Desafios históricos, por mais que já tenham sido solucionados, devem ser apresentados aos alunos sem a devida solução, primeiro para privilegiar o raciocínio do aluno que busca por si só resolver a questão, e segundo para que alunos busquem a solução em livros e na internet. Esta busca também acaba agregando conhecimento ao aluno.

2 A FÓRMULA DE BHÁSKARA

Antes que cometamos algum engano, devemos esclarecer que existiram dois matemáticos chamados de Bháskara. O primeiro do século VII o outro do século XII. A popular fórmula de Bháskara, a fórmula resolutiva da equação do 2º grau, é obra do segundo. Na verdade, o método utilizado por Bháskara é bem diferente da equação que é ensinada na 8ª série ou 9º ano do Ensino Fundamental.

Esta fórmula recebe seu nome por ter sido ele quem pela primeira vez desenvolveu um método de resolução para qualquer equação quadrática. Este método foi publicado em sua obra Lilavati, onde também mostram equações lineares, progressões aritméticas e geométricas, tríades pitagóricas entre outras coisas. O livro é um melhoramento da antiga obra chamada de *Brahmasphuta Siddhanta*, produzida por Brahmagupta, que viveu na Índia por volta de 628 d.C.

O nome desta obra é uma homenagem à filha do autor, Lilavati. Segundo a lenda, Bháskara calculou o momento ideal para que ocorresse o casamento da Filha. Entre os hindus, é comum o uso da astrologia como forma de prever e orientar o destino das pessoas. Faz parte da religião. Após calcular o dia exato em que deveria ocorrer o casamento da filha, Bháskara também marcou em um relógio de água (espécie de ampulheta que, ao invés de areia, contém água) o momento do início da cerimônia. Durante a espera, sem que ninguém percebesse, uma pérola do cabelo da moça caiu dentro do relógio, obstruindo a passagem da água. Quando se deram conta, o sol já estava se pondo e o momento do casamento já havia passado.

Lilavati jamais se casou, pois a astrologia não favorecia o casamento em nenhum outro momento de sua vida. Possivelmente é desta história que vem a superstição que diz: noivas que usam pérolas no dia do casamento atraem azar para o matrimônio.

Compadecido com o triste fim de sua filha, Bháskara pôs o nome Lilavati na sua mais importante obra. Esta obra ficou famosa não apenas na Índia, mas também na China e foi traduzida para o árabe.

3 AL KHOWARIZMI E A OBRA AL JABR

Já falamos sobre Al Khowarizmi e da sua importância no desenvolvimento do nosso sistema numérico. Tão importante quanto à sua contribuição para a área da aritmética, foi sua obra *Al Jabr*, para o desenvolvimento da álgebra. Esta obra foi tão influente que o próprio nome álgebra deriva do título *Al Jabr*, e Al Khowarizmi é considerado por muitos o pai da álgebra.

O título completo do livro, *Al Jabr Wa'l Muqabalah*, possui tradução incerta. O termo *Muqabalah* pode ser traduzido como "redução", na prática, redução dos termos semelhantes ou cortar termos idênticos de cada lado de uma equação. Já o termo *Al JabrI* significa transposição, passar para o outro lado trocando a operação. É justamente sobre isto que o livro fala: que em uma igualdade se poderia adicionar ou retirar termos iguais, que cada operação feita de um lado deveria ser feita do outro também para que permanecesse a igualdade. Traz ainda uma prática que atualmente é condenada pelo ensino de matemática, passar para o outro lado da equação trocando o sinal.

Neste trabalho, Al Khowarizmi não utiliza nenhum símbolo. Todas as operações, passagens incógnitas e até os números são escritos por extenso, passo a passo sistematicamente. A forma de escrever é única, apesar de ser possível perceber influências de hindus e gregas. Os métodos foram colocados de forma tão clara que qualquer pessoa letrada poderia compreender seu texto e fazer uso das aplicações.

Sua obra influenciou muitos outros matemáticos, inclusive o italiano Leonardo de Pisa, que, como já falamos, introduziu na Europa a álgebra e também a aritmética árabe. Com o avanço da álgebra pela Europa, começaram a surgir os símbolos para facilitar a escrita, a manipulação e o raciocínio de equações e expressões algébricas.

4 A ÁLGEBRA NA EUROPA

Na Alemanha, durante o século XVI, diversos matemáticos introduziram à álgebra diversos símbolos que ainda hoje são utilizados em equações, expressões algébricas e numéricas. Os sinais de + e - para representar operações de adição e subtração foram impressos pela primeira vez no livro *Rechnung auf allen Kauffmanschafften*, de Johann Widmann, que ensinava aritmética e álgebra para comerciantes. Adam Riese escreveu o livro *Die Coss*, que significa a incógnita, esta foi com certeza a obra que mais influenciou o abandono dos ábacos, substituídos por algoritmos e métodos algébricos.

Graças aos estudos na área da Álgebra, também surgiu na Alemanha nesta época o atual símbolo para as raízes, as frações decimais, sendo definidas as propriedades dos números negativos apesar de serem chamados de *"numeri absurdi"*.

NOTA

Apesar de Bháskara ter desenvolvido um método de resolução da equação do 2º grau no século XII, não existem evidências de que seu método tenha influenciado o desenvolvimento da álgebra na Europa no século XVI, pelo menos não diretamente. Provavelmente, os europeus desenvolveram seu próprio método ou aprenderam dos árabes.

Na Itália, como os matemáticos já sabiam resolver a equação do 2º grau, o objetivo dos algebristas era a descoberta das equações do 3º grau. Boyer (2006, p. 197) traz como se deu a publicação da solução das equações do 3º grau:

> [...] em 1545, a resolução não só da cúbica como também da quadrática tornam-se de conhecimento comum pela publicação da Ars Magna de Gerônimo Cardano (1501-1576). Um progresso tão notável e imprevisto causou tal impacto sobre os algebristas que o ano de 1545 frequentemente é tomado por marco do início do período moderno na matemática. Deve-se assinalar imediatamente, porém, que Cardano (ou Cardan) não foi o descobridor original da solução quer da cúbica quer da quadrática. Ele próprio admitiu isso francamente em seu livro. A sugestão para resolver a cúbica, ele afirma, tinha-lhe sido dada por Niccolo Tartaglia (cerca de 1500-1557); a solução da quadrática tinha sido descoberta primeiramente pelo antigo amanuense de Cardano, Ludovico Ferrari (1522-1565). O que Cardano deixou de mencionar na *Ars Magna* foi o solene juramento que havia feito a Tartaglia, de não revelar o segredo, pois este último pretendia firmar sua reputação publicando a solução da cúbica como coroação de seu tratado sobre álgebra.

A história da solução das equações do 3º e 4º graus traz muitas lições importantes que o professor pode trabalhar em sala de aula. Não é pelo fato de alguém ser considerado um "herói" da matemática que é uma pessoa sem defeitos. Afinal, matemáticos são pessoas comuns. Não vamos aqui condenar Cardano, apesar de ter jurado em falso perante a Bíblia, pois Tartaglia estava para publicar sua fórmula há bastante tempo e não o fazia. Talvez o medo de que Tartaglia viesse a morrer e levasse consigo a fórmula fez com que Cardano agisse desta forma, já que os créditos da descoberta foram atribuídos corretamente. Antecipar a divulgação da solução também pôde ter sido motivada pela necessidade que Cardano tinha em aplicar esta fórmula em seus estudos em física. Se por um lado "existem males que vêm para bem", por outro "um erro não justifica o outro".

Agora que sabemos que a Matemática não é feita apenas de bons moços, voltamos à história da Álgebra. Já falamos de Descartes e Fermat, afinal a Geometria Analítica nada mais é do que o casamento perfeito entre a álgebra e a geometria. A capacidade de visualização das equações no plano cartesiano fez com que fosse possível perceber características e propriedades de diversos tipos de equação, facilitando o estudo, as aplicações e o ensino destes conteúdos.

A geometria analítica e os números complexos não foram as únicas coisas que foram desenvolvidas a partir do estudo da álgebra. Outra área que foi desenvolvida através do estudo da álgebra é o Cálculo Diferencial e Integral, mas isto já é algo que estudaremos na próxima Unidade.

LEITURA COMPLEMENTAR

O PENTAGRAMA PITAGÓRICO

Care B. Boyer

Dizia-se que o lema da escola pitagórica era "Tudo é Número". Lembrando que os babilônicos tinham associado várias medidas numéricas às coisas que os cercavam, desde os movimentos nos céus até o valor de seus escravos, podemos perceber neste lema uma forte afinidade com a Mesopotâmia. Mesmo o teorema, a que o nome de Pitágoras ainda está ligado, muito provavelmente veio dos babilônicos. Sugeriu-se, como justificativa para chamá-lo teorema de Pitágoras, que foram os pitagóricos os primeiros a dar uma demonstração dele; mas não há meios de se verificar esta conjetura. As lendas de que Pitágoras sacrificou um boi (cem bois segundo outras versões) ao descobrir o teorema são implausíveis, tendo em vista as regras vegetarianas da escola. Além disso, são repetidas, com idêntica incredibilidade, em conexão com diversos outros teoremas. É razoável supor que os membros antigos da escola pitagórica tinham familiaridade com propriedades geométricas conhecidas pelos babilônicos; mas quando o sumário de Eudemo-Proclo lhes atribui a construção das "figuras cósmicas" (isto é sólidos regulares) há lugar para dúvidas. O cubo, o octaedro e o dodecaedro podiam ter sido observados em cristais, como o da pirita (dissulfeto de ferro); mas em *Os Elementos XIII* está escrito que os pitagóricos só conheciam três dos poliedros regulares: o tetraedro, o cubo e o dodecaedro. Conhecimento dessa última figura é plausível, dada a descoberta perto de Pádua de um dodecaedro de pedra etrusco datado de antes de 500 a.C. Não é impossível, portanto, que, mesmo que os pitagóricos não conhecessem o octaedro e o icosaedro, conhecessem algumas propriedades do pentágono regular. A estrela de cinco pontas (formada traçando as cinco diagonais de uma face pentagonal de um dodecaedro regular) era, ao que se diz, o símbolo especial da escola pitagórica. O pentágono estrelado tinha aparecido antes na arte babilônia, e é possível que aqui também tenhamos um elo entre a matemática pré-helênica e a pitagórica.

Uma das questões tantalizantes quanto à geometria pitagórica diz respeito à construção do pentagrama ou pentágono estrelado. Se começarmos com um polígono regular *ABCDE* e traçarmos as cinco diagonais, essas diagonais se cortam em pontos *A′B′C′D′E′*, que formam outro pentágono regular. Observando que o triângulo *BCD′*, por exemplo, é semelhante ao triângulo isósceles *BCE* e, observando também os muitos pares de triângulos congruentes no diagrama, não é difícil ver que os pontos A′B′C′D′E′ dividem as diagonais de um modo notável. Cada um deles divide uma diagonal em dois segmentos desiguais, tais que a razão da diagonal toda para o maior é igual a deste para o menor. Essa subdivisão das diagonais é a bem conhecida "secção áurea" de um segmento, mas que este nome só foi dado uns dois mil anos depois – mais ou menos na época em que Kepler escrevia liricamente:

"A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado com uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de joia preciosa".

Para os gregos antigos, esse tipo de subdivisão logo se tornou tão familiar que não se achava necessário ter um nome especial para ela; por isso a designação "divisão de um segmento em média e extrema razão" em geral é substituída simplesmente pela palavra "secção".

Uma das propriedades da "secção" é que, por assim dizer, ela se autopropaga. Se um ponto P_1 divide um segmento *RS*, em média e extrema razão, sendo RP_1 o segmento maior e, se sobre esse segmento maior marcarmos o ponto P_2 tal que $RP_2 = P_1S$, então o segmento RP_1 por sua vez ficará subdividido em média e extrema razão pelo ponto P_2. Novamente se marcarmos em RP_2 o ponto P_3 tal que $RP_3 = P_2P_1$, o segmento RP_2 ficará subdividido em média e extrema razão por P_3. Esse processo interativo, é claro, pode ser repetido tantas vezes quanto se queira, obtendo-se segmentos RPn cada vez menores divididos em média e extrema razão por $P\ n{+}1$. Se os pitagóricos observaram ou não esse processo sem fim, ou dele tiraram conclusões significativas, não se sabe. Mesmo a questão mais fundamental de saber se os pitagóricos de cerca de 500 a.C. sabiam dividir um segmento em média e extrema razão não pode ser respondida com segurança, embora fosse muito provável que sim. A construção equivalente à resolução de uma equação quadrática. Para mostrar isso, seja $RS = a$ e $RP1= xRP1 = x$. Então pela propriedade da secção áurea $a : x = x : (a - x)$ e multiplicando médios e extremos, temos a equação $x^2 = a^2 - ax$. Essa é uma equação quadrática do tipo 1 na classificação do Ca. 3, e Pitágoras podia ter aprendido dos babilônios como resolvê-la algebricamente. No entanto, se a é um número racional, não há um número x racional que satisfaça a equação. Teria Pitágoras percebido isso? Parece improvável. Talvez os pitagóricos tenham usado, em vez do método algébrico de resolução dos babilônios, um processo geométrico análogo ao que se encontra em *Os Elementos II, 11 e VI, 30* de Euclides. Para dividir um segmento da reta AB em média e extrema razão, Euclides construía primeiro sobre *AB* o quadrado *ABCD*. Então bissectava *AC* pelo ponto *E*, traçava *EB* e prolongava a reta *CEA* até F tal que *EF = EB.* Completando o quadrado *AFGH*, o ponto H será o ponto procurado, pois se pode ver imediatamente que *AB : AH = AH : HB*. Se pudéssemos saber que tipo de solução, se é que tinham alguma, os pitagóricos adotavam para o problema da secção áurea, avançaríamos bastante no esclarecimento do nível e das características da matemática pré-socrática. Se a matemática pitagórica começou sob a influência babilônia, com sua forte fé nos números, como (e quando) aconteceu que esta cedeu lugar à ênfase familiar sobre a geometria pura, que está tão firmemente instalada na posição central nos trabalhos clássicos?

FIGURA – PENTAGRAMA, SECÇÃO ÁUREA E CONSTRUÇÃO DA SECÇÃO ÁUREA

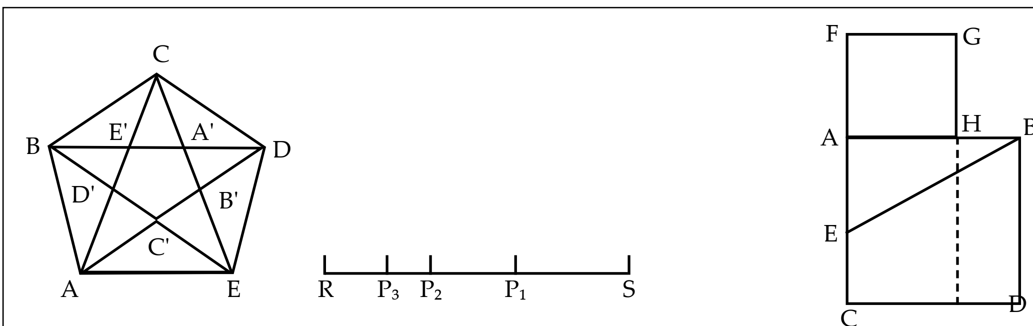


Figura 4.1 Figura 4.2 Figura 4.3

FONTE: Boyer (2006, p. 35)

RESUMO DO TÓPICO 5

Neste tópico, você acompanhou:

- Que a álgebra é tão antiga quanto a aritmética, sendo praticada desde a Antiguidade pelos egípcios e babilônicos.

- A origem do nome "fórmula de Bháskara".

- O surgimento, na Alemanha, dos símbolos aplicados atualmente.

- A história da resolução da equação do 3º grau.

AUTOATIVIDADE

1 Qual o nome do método que os egípcios utilizavam para resolver problemas algébricos?

2 Demonstre a fórmula de Bháskara.

3 Faça uma pesquisa e descubra a origem de sinal de igualdade (=).

UNIDADE 3

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS ÚLTIMOS SÉCULOS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

A partir desta unidade você será capaz de:

- compreender como a obra de Isaac Newton teve influência no mundo e na ciência;
- entender o motivo da rivalidade entre Newton e Leibniz;
- identificar as notações desenvolvidas por Leibniz e Euler;
- perceber como a vida e a obra de Leibniz e Euler contribuíram com o desenvolvimento da Matemática;
- enunciar as mudanças que o desenvolvimento do cálculo causou na sociedade e no sistema de produção da época;
- descrever como a estatística se desenvolveu ao longo da história;
- relatar como a probabilidade surge e qual sua importância dentro da estatística;
- compreender a importância de dois institutos brasileiros, o IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – e o IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada –, na pesquisa e no ensino da Matemática;
- entender a importância da Teoria dos Conjuntos para o ensino da Matemática;
- compreender como Georg Cantor se tornou o pai da Teoria dos Conjuntos;
- destacar tópicos importantes sobre a história da Matemática no ensino e seus principais autores;
- reconhecer como algumas tendências de ensino colaboraram com o desenvolvimento da história da Matemática;
- compreender o que é Etnomatemática.

PLANO DE ESTUDOS

Os estudos desta unidade serão apresentados em quatro tópicos, listados a seguir:

TÓPICO 1 – HISTÓRIA DO CÁLCULO

TÓPICO 2 – HISTÓRIA DA ESTATÍSTICA E DAS PROBABILIDADES

TÓPICO 3 – HISTÓRIA DA TEORIA DOS CONJUNTOS

TÓPICO 4 – HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO

TÓPICO 1

HISTÓRIA DO CÁLCULO

1 INTRODUÇÃO

Dificilmente encontraremos na história da Matemática uma área que tenha contribuído tanto para o nosso desenvolvimento tecnológico e científico quanto o Cálculo Diferencial e Integral. Suas aplicações são inúmeras, vão desde o controle de pragas em uma lavoura de soja até o desenvolvimento de aeronaves espaciais, passando pela geração, distribuição, e consumo de energia elétrica.

Atualmente, não existe curso de Engenharia ou de Graduação tecnológica sem diversas horas de estudo sobre esse assunto. O Cálculo Diferencial e Integral é estudado em disciplinas como Introdução ao Cálculo, Cálculo Numérico, Equações Diferenciais, Cálculo Superior ou ainda se multiplicando sob as denominações Cálculo I, Cálculo II, até Cálculo V. É claro que, além do cálculo, outras áreas da matemática também contribuem para os cursos de engenharia, como, por exemplo, a Estatística, a Álgebra e a Geometria.

Áreas como a Física, a Química e a Biologia também se valem e se somam ao cálculo para realizarem diversas pesquisas e desenvolverem novos conhecimentos. As pesquisas com células-tronco, o tratamento de águas e afluentes e o lançamento de foguetes ao espaço são apenas alguns exemplos de como o cálculo está presente em nossas vidas.

O cálculo é tão necessário nessas ciências que seu desenvolvimento se deve inicialmente a um físico (e não a um matemático) chamado de Isaac Newton (1642-1727). É bem verdade que Fermat já havia escrito algo sobre o assunto anteriormente, mas como não costumava publicar as descobertas, é provável que suas ideias nessa área tenham pouco influenciado Isaac Newton. É verdade também que, enquanto Newton pesquisava sobre cálculo na Inglaterra, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) desenvolvia na Alemanha o mesmo cálculo, apenas com notações diferentes, tendo, inclusive, feito as primeiras publicações sobre o assunto. Newton, no entanto, é considerado o pai do cálculo, pois desenvolveu seu raciocínio pelo menos 10 anos antes de Leibniz.

2 ISAAC NEWTON

Antes de Newton nascer no natal de 1642, em Lincolnshire, sua mãe havia se tornado viúva. Esta condição fez com que sua família enfrentasse grandes dificuldades durante os primeiros anos da vida do menino. Sua mãe casou-se novamente quando o menino tinha 3 anos de idade e foi morar com o novo marido, um clérigo rico, na cidade de South Witham. A pedido do marido, ela deixou Isaac aos cuidados da avó em Woolstorpe. Com o novo casamento da mãe, as dificuldades para a família cessaram, mas o isolamento e a distância fizeram de Newton uma criança tímida e introvertida. Muitos anos mais tarde, Isaac ainda lembraria com muito rancor do padrasto. Quando Isaac tinha 10 anos, sua mãe tornou-se novamente viúva e voltou a morar com a avó e o menino em Woolstorpe.

NOTA

Lincolnshire, South Witham e Woolstorpe são pequenas cidades inglesas próximas a Grantham, que por sua vez é um pouco maior que as outras, mas não muito importante em nível nacional.

Na escola rural onde teve os primeiros ensinamentos, era considerado um aluno mediano. Não se dedicava às tarefas e afazeres escolares, preferia ficar estudando assuntos de seu interesse e confeccionar modelos e maquetes de máquinas e engenhos. Não era bem aceito pelos outros meninos de sua idade e seus professores o consideravam antissocial. Aos 12 anos de idade, foi estudar em Grantham e passou a morar com seu tio William Ayscough, que era farmacêutico na cidade. O quadro de timidez e introspecção se modificou radicalmente após o seguinte fato:

> [...] pouco antes de completar 14 anos, ocorreu um fato importante que provocou grandes mudanças. Isaac envolveu-se em uma briga com o valentão da escola. Ele era muito maior que Isaac e extremamente malvisto entre os outros meninos. Apesar de ser pequeno e completamente frágil, Isaac ganhou a luta pela astúcia, provocando em seu rival um sério sangramento nasal. Depois dessa vitória, Isaac se tornou muito estimado, o que o encorajou a se dedicar firmemente à escola e a vencer tanto física quanto intelectualmente. Funcionou tão bem que ele logo se tornaria um líder, ganhando o respeito dos professores e dos seus colegas de classe (WHITE, 1993, p. 13-14).

Desde jovem se mostrou com grandes habilidades manuais. Costumava fazer para sua avó e para outras crianças peças de madeira para o uso diário ou para brincadeiras infantis. Mais tarde, este aptidão o ajudou muito na confecção de instrumentos utilizados em suas pesquisas, como, por exemplo, um telescópio refletor muito mais potente que as lunetas desenvolvidas por Galileu Galilei (1564-1642).

As dificuldades financeiras fizeram com que sua mãe tentasse fazer com que Isaac, aos 16 anos, parasse seus estudos e fosse trabalhar na lavoura. Esta ideia não o agradava, pois tinha interesse em continuar estudando. Dois motivos fizeram com que sua mãe concordasse em deixar o filho na escola: o primeiro era a total falta de talento para o campo, a segunda era a admiração que Henry Stokes, diretor da escola de Grantham, tinha para com o talento do jovem Isaac. Stokes chegou a afirmar que Newton foi o melhor estudante que tinha visto durante todos os anos como professor e diretor em Grantham.

Graças à influência de Stokes e de seu tio, aos 18 anos Newton ingressou na Universidade de Cambridge no dia 4 de junho de 1661.

2.1 OS PRIMEIROS ANOS EM CAMBRIDGE

Para permanecer estudando em Cambridge, Newton trabalhava como servente, limpando os quartos, trabalhando nos refeitórios e atendendo os professores da universidade. Ele preferia este serviço, que lhe permitia permanecer estudando, do que voltar à casa de sua mãe para trabalhar na lavoura.

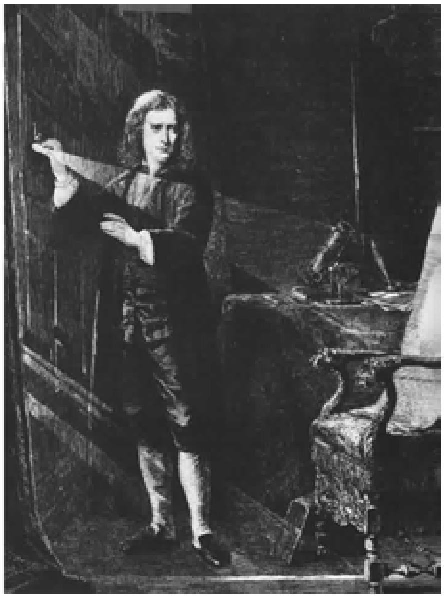
Seu primeiro objeto de estudos foi a química, interesse que manteve até o fim da vida. Ao mesmo tempo, também conheceu e estudou as obras de Euclides, Descartes, Galileu, Kepler e muitos outros. Ele mesmo afirmou posteriormente que, "Se eu enxerguei mais longe que Descartes, é porque me sustentei sobre os ombros de gigantes".

Em 1664, veio a primeira grande descoberta. Ainda não foi o Cálculo Diferencial e Integral, mas uma revolução no estudo da luz. Isaac comprou em uma feira itinerante que chegara a Cambridge um prisma que refletia o arco-íris a partir da luz do sol. Para uma pessoa comum, poderia ser apenas um brinquedo, mas Newton viu ali um interessante instrumento de pesquisa. Ao chegar de volta em seu quarto no Trinity College, fechou todas as cortinas e, através de um furo em uma cartolina, deixou entrar apenas um raio de sol. Na parede, este raio era completamente branco, mas quando colocou em frente ao furo o prisma este raio se dividiu em todas as cores do arco-íris.

Percebeu então que a luz branca é composta por todas as cores. Após diversas outras experiências com prismas, publicou um trabalho sobre a luz e chamou de espectro o feixe colorido formado por ela. Somente alguns anos mais tarde este trabalho foi reconhecido e ajudou no desenvolvimento de óculos, lentes de aumento, microscópios e, mais recentemente, no descobrimento do Raio Laser.

No ano de 1665, torno-se Bacharel em Artes. Em Cambridge, qualquer aluno que completasse quatro anos de estudo era agraciado com este título, podendo, após isto, permanecer na universidade para estudar a área do conhecimento de sua escolha.

FIGURA 46 – NEWTON ESTUDANDO A LUZ



FONTE: White (1993, p. 20)

No verão do mesmo ano, toda a Inglaterra foi invadida pela peste, uma terrível epidemia que matou grande parte da população. Por um decreto real, todas as escolas e universidades foram fechadas por aproximadamente um ano e meio. Neste tempo, Newton voltou para casa em Lincolnshire, onde teve tempo e sossego para desenvolver suas grandes ideias. Este período é conhecido como o ano milagroso para a Matemática.

2.2 1666, O ANO MILAGROSO DA MATEMÁTICA

Até março de 1667, Newton permaneceu na fazenda de sua mãe em Lincolnshire. Abrigado da epidemia pelo isolamento, em poucos meses, fez assombrosos avanços em diversas áreas.

O primeiro deles foi, sem dúvida, a lei da gravitação universal. Parecia ser estranho que dois corpos, sem estarem amarrados entre si, poderiam se puxar mutuamente. A ideia de gravidade já havia sido explorada por Galileu, porém foi Newton quem generalizou este conceito, afirmando que "dois corpos se atraem entre si com uma força que varia de modo inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles".

A partir desta generalização, vamos analisar dois casos:

I- Segundo a lei da gravitação, quando uma pedra é lançada do alto de uma torre, ao mesmo tempo em que é atraída pela Terra, também atrai a Terra para si. Isto é fácil de entender, pois, como a massa da Terra é muito maior que a da pedra, a Terra praticamente não se move em relação à pedra. Como a massa da pedra é insignificante perto da massa da Terra, o deslocamento da terra será insignificante frente ao deslocamento da pedra.

II- Se dois corpos se atraem mutuamente, por que a lua não cai na terra ou a terra não cai no sol? Newton também conseguiu explicar isto facilmente através dos estudos de Kepler sobre a trajetória celeste e a lei de Huygens sobre força centrípeta. Se pegarmos um balde com água e começarmos a girar rapidamente, a água não sairá do balde devido à força centrípeta, é esta força que faz com que a lua não caia na Terra nem a Terra vá de encontro ao sol, uma vez que a lua está girando ao redor da Terra e a Terra ao redor do sol.

Se por algum motivo, a lua parar de girar em torno da Terra, a força centrípeta não atuará mais, e fatalmente ela "cairá" na Terra pela força da gravidade. Este equilíbrio entre a força centrípeta e a força da gravitação universal faz com que a Terra não caia no sol nem saia do sistema solar por uma tangente de sua órbita.

Alguns autores relacionam a teoria da gravidade com uma maçã que caiu na cabeça de Newton quando ele estudava debaixo de uma macieira na fazenda de sua mãe, e que, como por encanto, toda a teoria apareceu em sua cabeça. Parece que realmente foi atingido por uma maçã debaixo de uma macieira, mas devemos compreender que não foi este fato, isoladamente, que fez com que ele desenvolvesse toda a teoria. Devemos compreender que este fato foi apenas a gota d'água que faltava para o desenvolvimento da teoria, pois, antes disso, Newton tinha sido um aluno dedicado que leu todas as principais obras dos maiores matemáticos e físicos da época. No caso da gravitação, já falamos que Newton se baseou em estudos de Galileu, Kepler e Huygens, entre outros.

A partir da história de Newton, compreendemos que um gênio não surge de uma varinha de condão ou de uma mágica mirabolante. Com certeza Isaac era especial, talvez sua genética, sua criação isolada ou até algum toque divino lhe foi conferido, mas suas horas de estudo foram fundamentais na formação de suas ideias geniais.

2.2.1 O surgimento do cálculo diferencial e integral

Neste mesmo período, Newton desenvolveu o Cálculo Diferencial e Integral. O Cálculo era algo necessário para provar que sua teoria física estava certa. Teve ele que desenvolver toda uma teoria matemática, baseada principalmente em Descartes e Kepler, para então sustentar a sua teoria da gravitação universal e da força centrípeta. Mais uma vez, percebemos que a matemática pode avançar, não pela necessidade do cotidiano de pessoas comuns, mas, sim, para promover o avanço tecnológico e conceitual de outras áreas da ciência.

Suas ideias sobre o cálculo foram publicadas somente em 1711 na obra intitulada *De analysi per equationes numero terminorum infinitas*. Nesta obra, ele generaliza duas ideias: a derivação e a integração para quaisquer equações.

NOTA

Newton desenvolveu o cálculo diferencial e integral sem utilizar funções. Seu cálculo foi desenvolvido para equações, podendo ser representado no plano cartesiano. O conceito e definição de funções foi desenvolvido mais tarde pelo seu maior rival, o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz.

A derivação nada mais é do que determinar a variação ocorrida em y depois de uma variação infinitamente pequena em x.

A ideia de integração também é apresentada para se obter a área sob uma curva definida por uma equação.

DICAS

Você estudará mais aprofundadamente as derivadas e integrais nas disciplinas de Introdução ao Cálculo, Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais e Cálculo Numérico.

2.3 DE VOLTA A CAMBRIDGE

Apesar de a publicação ter sido feita somente em 1711, *De analysi* fora lida por alguns amigos assim que foi composta, entre eles John Collins (1625-1683) e Isaac Barrow (1630-1677). Barrow era professor em Cambridge e um grande admirador e incentivador de Newton. Quando este voltou para a universidade, assim que a ameaça da peste havia passado, logo apresentou suas teorias ao amigo e professor.

Em Cambridge, Barrow ficou impressionado com a teoria de Newton e logo o indicou para uma bolsa de estudos. Aos 25 anos de idade, ele se tornara um pesquisador do Trinity College. Com mais apoio da universidade e com mais tempo livre, continuou seus estudos sobre física, matemática e astronomia.

Um ano mais tarde, Isaac Barrow pediu sua aposentadoria e nomeou Isaac Newton como seu sucessor. Aos 26 anos de idade, ele era o mais jovem professor de Matemática que Cambridge havia aceitado em todos os tempos. Esta posição lhe atribuía prestígio sem tomar muito seu tempo de pesquisa. Apesar da genialidade para a pesquisa, suas aulas não eram boas, seus alunos se evadiam das aulas gradativamente, aula após aula. Ano a ano, as matrículas nas disciplinas que ministrava diminuíam. Segundo alguns autores, Newton chegou a ministrar aulas para uma turma sem nenhum aluno.

Apesar do fracasso como professor, seu prestígio aumentava. Após ter desenvolvido um telescópio muito mais potente que o de Galileu, fora convidado a integrar a Royal Society (Sociedade Real) em 1672.

NOTA

Esta sociedade era composta pelos principais cientistas da Inglaterra, entre eles o arquiteto Christopher Wren, construtor da Catedral Saint Paul, de Londres, e o químico Robert Boyle, que desenvolveu a lei dos gases. A sociedade foi inaugurada em 1660 pelo rei Charles II, com o objetivo de desenvolver a ciência através de encontros periódicos dos maiores cientistas da época. O objetivo dessa sociedade era apurar a verdade através dos fatos, alheios a dogmas religiosos.

Foi nas reuniões da Royal Society que conheceu um de seus mais ferrenhos rivais, Robert Hooke, que contestava sua teoria sobre a luz e se dizia pioneiro nessa área. Devido a muitas reuniões pouco amistosas nessa sociedade, Newton, influenciado pelo amigo Edmund Halley, decidiu organizar e publicar sua mais importante obra, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Iniciou o trabalho em 1684 e conseguiu publicar apenas em 1686. Nela traz, além de uma versão inicial sobre o cálculo diferencial e integral, as três Leis do Movimento Universal que nortearam o estudo da física até o surgimento da teoria da Relatividade de Einstein, em 1905.

As três leis foram:

Primeira lei. Um ponto em repouso permanece em repouso a menos que sobre ele atue uma força externa. Um corpo em movimento desloca-se com velocidade constante, a menos que sobre ele atue uma força externa.

Segunda lei. A aceleração de um corpo tem a direção da força externa resultante que atua sobre ele. É proporcional ao módulo da força externa resultante e inversamente proporcional à massa do corpo:

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{F_{res}}}{m}$$

ou

$$\overrightarrow{F_{res}} = m\vec{a}$$

A força externa resultante é a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre o corpo: $\overrightarrow{F_{res}} = \Sigma\vec{F}$. Então:

$$\Sigma\vec{F} = \overrightarrow{F_{res}} = m\vec{a}$$

Terceira lei. As forças sempre atuam aos pares de forças iguais, porém opostas. Se um corpo A exerce uma força sobre um corpo B, este exerce sobre A uma força que tem módulo igual ao da primeira, porém sentido oposto.

FONTE: Tipler (2000, p. 76)

Graças a este livro, muitos outros cientistas e engenheiros conseguiram desenvolver grandes projetos, como a primeira estrada de ferro, o primeiro trem a vapor, o primeiro navio a vapor e as grandes pontes pênseis do século XIX. Podemos dizer com certeza que *Princípia* constituiu a principal base para o desenvolvimento tecnológico que levou a Inglaterra à revolução industrial.

No estudo da Astronomia, atualmente, a maioria dos cientistas utilizam a Teoria da Relatividade de Albert Einstein, que é mais completa e leva em consideração detalhes que Newton não poderia ter percebido por questões técnicas e instrumentais. Contudo, a Mecânica Clássica (forma com que ficou conhecida a parte da Mecânica que leva em consideração apenas as leis de Newton) ainda é utilizada por engenheiros mecânicos, civis e por arquitetos. O próprio Einstein afirmou que as leis de Isaac Newton equivalem às dele quando próximas a corpos muito grandes, como a Terra, por exemplo.

2.4 O HOMEM PÚBLICO

Após a publicação de *Principia*, Isaac voltou a Cambridge e se dedicou à química, em que não obteve grandes sucessos. Esteve por alguns tempos enfermo até que um convite lhe despertou novamente o interesse pela vida. Em 1696, assumiu um importante cargo de diretor da Real Casa da Moeda. Após alguns anos de trabalho nesta instituição, foi promovido a Mestre da Real Casa da Moeda, cargo de extrema confiança do rei da Inglaterra.

FIGURA 47 – RETRATO DE NEWTON QUANDO MORAVA EM LONDRES

FONTE: Garbi (1997, p. 79)

Neste cargo, implantou um rigoroso sistema de controle de cunhagem e fundição de metais preciosos. Desenvolveu métodos científicos de confecção, distribuição e controle de moeda. Mais uma vez, utilizou o cálculo para controlar a economia e avaliar os indicadores financeiros. Promoveu ainda uma grande perseguição aos falsificadores e cortadores de moedas.

Cortadores eram criminosos que tiravam pequenas lascas de moedas e fundiam para extraírem a prata.

Foi nesta época que ocorreu um dos mais pitorescos casos relacionados à sua genialidade.

> Em junho de 1696, o grande matemático suíço Jean Bernoulli (1667-1748) questionou-se sobre qual a trajetória, dentre todas as possíveis ligando dois pontos A e B em níveis diferentes, que seria percorrida em menor tempo por um corpo sobre o qual agisse apenas a força da gravidade. Neste caso, a reta, embora seja o caminho mais curto, não é o caminho mais rápido. Tal curva foi chamada de Braquistócrona e pode-se demonstrar que é um arco de cicloide. A prova disso não é fácil e Bernoulli submeteu o problema aos maiores matemáticos do mundo, dando um prazo de seis meses, posteriormente ampliado em mais quatro, para sua solução. Naquela época, Newton não mais vivia em Cambridge e trabalhava em Londres, como Diretor da Casa da Moeda da Inglaterra. Certa noite, voltando do trabalho, encontrou em sua escrivaninha a carta de Bernoulli. Interessou-se pela questão e, sem sequer haver jantado, pôs-se a trabalhar sobre ela, resolvendo-a

> na mesma madrugada. Em uma atitude tipicamente sua, publicou a solução anonimamente no jornal da Royal Society, mas nada escreveu a Bernoulli. Algum tempo depois, lendo o jornal, este encontrou a belíssima demonstração e não teve a menor dúvida de que somente um homem na Inglaterra poderia tê-la produzido. Suas palavras foram: "Pelas garras se conhece o leão" (GARBI, 1997, p. 82).

Suas novas atividades em Londres não o afastaram da Royal Society, e em 1703 foi eleito presidente desta instituição. Apesar do acúmulo de cargos, sua força de trabalho lhe permitia comandar com sabedoria as duas instituições.

Quando Isaac assumiu a Sociedade Real, ela estava com o prestígio abalado. Durante anos, tinha sido presidida por políticos que a utilizavam para se autopromoverem em detrimento dos interesses da ciência. Sob a nova administração, as coisas mudaram e apenas cientistas de renome podiam discursar nas reuniões, o que fez com que muitas personalidades científicas voltassem a participar das reuniões, devolvendo à Sociedade seu prestígio.

Em 1705, o gênio foi agraciado com a mais alta honraria concedida na Inglaterra. Ele foi elevado à condição de cavalheiro pela Rainha Anne. Foi o primeiro cientista a receber esta homenagem e passou a assinar Sir Isaac Newton. Outra grande honraria concedida a ele foi o direito de ser enterrado na Abadia de Westminster, ao lado de todos os reis e rainhas da Inglaterra. Seu velório durou uma semana.

Voltaire, que presenciou todos os rituais fúnebres, afirmou: "Eu vi um Professor de Matemática, só porque era grande em sua vocação, ser enterrado como um rei que tivesse feito bem aos seus súditos" (BOYER, 2006, p. 285).

Em 1969, quando pela primeira vez um homem posou na Lua, quatro jovens americanos levaram ao túmulo de Newton uma coroa de flores com uma faixa dizendo: "The Eagle Has Landed" (A Águia Pousou). Eagle (Águia) era o nome da nave espacial que levou Neil Armstrong a ser o primeiro homem a caminhar na Lua. Os estudantes julgaram que esta seria uma justa homenagem ao gênio que permitiu esse grande feito para a humanidade.

Antes de morrer em 1727, Newton envolveu-se em uma dura batalha contra Leibniz, por conta do direito da autoria do Cálculo Diferencial e Integral. Leibniz reivindicou a autoria do Cálculo por ter publicado em 1684 sua primeira obra sobre assunto, dois anos antes de Isaac publicar *Principia*, porém bem depois dele ter desenvolvido o cálculo, em 1666.

3 GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

Leibniz nasceu em 1646 na cidade de Leipzig, na Alemanha. Sua capacidade de aprender era notória, tendo entrado com apenas 15 anos para a universidade de sua cidade natal, e aos 17 terminado o bacharelado em Direito. É considerado por muitos historiadores o último homem a dominar todos os conhecimentos, pois havia estudado Matemática, Física, Medicina, Filosofia, Teologia e Direito. É claro que naquela época os conhecimentos acumulados pela humanidade sobre essas áreas eram bem menores que os atuais, permitindo que alguém com muita capacidade conseguisse absorver todos eles. Atualmente seria muito difícil alguém repetir este feito, já que a grande quantidade de conhecimentos desenvolvidos pela humanidade tornaria sobre-humano este feito.

FIGURA 48 – RETRATO DE LEINBIZ

FONTE: Boyer (2006, p. 275)

Seus talentos logo o levaram a ser diplomata de Hannover. Durante os anos de diplomacia, viajou muito, conheceu muitos cientistas, matemáticos, além de muitos monarcas e políticos importantes. Esta atividade não o impediu de prosseguir os estudos, principalmente o de Matemática. Sendo um autodidata, leu obras de Pascal, Barrow, Collins e muitos outros e chegou a ser membro da Royal Society.

3.1 DISPUTAS COM NEWTON

Nas duas primeiras edições do *Principia*, Isaac Newton reconhece que Leibniz havia desenvolvido um método matemático semelhante ao seu Cálculo Diferencial e Integral. Inclusive Leibniz foi o primeiro a publicar sobre o assunto em um periódico chamado *Acta Eruditorum*, em 1684, dois anos antes da primeira publicação do *Principia*. No entanto, a disputa sobre a paternidade do cálculo levou Newton a retirar a referência feita ao rival das edições seguintes.

Newton se considerava o pioneiro na descoberta do cálculo que, como vimos, ocorreu em 1666 durante o ano milagroso. Por sua vez, Leibniz desenvolveu sua teoria por volta de 1676. A maioria dos historiadores, exceto os ingleses, acredita que a obra de Leibniz seja tão original quanto a de Newton, pois ele nunca tivera acesso à obra do rival inglês.

Para que possamos entender melhor a cronologia dos fatos, observe o quadro a seguir e entenda o motivo da disputa.

QUADRO 4 – CRONOLOGIA DO DESENVOLVIMENTO E PUBLICAÇÃO DO CÁLCULO

1666	Ano milagroso da ciência, Isaac Newton desenvolve o Cálculo Diferencial e Integral.
1676	Gottfried Wilhelm Leibniz desenvolve o Cálculo Diferencial e Integral com uma simbologia diferente da utilizada por Newton e sem conhecer seu trabalho.
1684	Leibniz faz sua primeira publicação sobre o assunto no periódico mensal *Acta Eruditorum* com o título *Nova methodus pro maximis ET minimos, itemque tangentibus, qua Nec irrationales quantitates moratur* (Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes que não é obstruído por quantidades irracionais).
1686	Newton publica *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Princípios matemáticos da filosofia natural), obra que contém, além de Cálculo, Fundamentos de Física.

FONTE: O autor

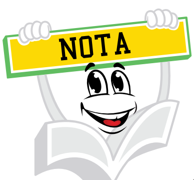
Percebemos que a briga toda gira em torno de que um desenvolveu primeiro e o outro publicou primeiro. O fato de que os dois desenvolveram a mesma ideia paralelamente, de forma independente um do outro, apenas contribui para o aumento da contenda. A Royal Society, inglesa e natural defensora de Newton, considerou que Leibniz havia copiado as ideias de um manuscrito e que isto configurava um plágio. Tal injustiça marcou profundamente a carreira do alemão e deixou uma mácula até os dias de hoje na história da Royal Society.

3.2 LEIBNIZ E A LINGUAGEM DO CÁLCULO

Os argumentos utilizados pela instituição que defendia Newton são tão infundados que facilmente podem ser combatidos observando as diferentes simbologias adotadas pelos dois matemáticos. A notação de Newton era absolutamente diferente da utilizada atualmente, não tinha desenvolvido o conceito de função, e utilizava um ponto sobre a incógnita que desejava diferenciar ou integrar.

As únicas semelhanças entre as duas notações eram:

- adoção das letras x e y para os eixos cartesianos (conforme Descartes);
- a extensão destes eixos para os lados negativos;
- a utilização do atual sinal de igual (=).



O primeiro a adotar duas barras como o sinal de igual foi o inglês Robert Record, em 1557. A popularização deste símbolo se deu somente no século seguinte, através das obras de Leibniz e Newton. Este símbolo foi adotado, pois Record considerava que nada poderia ser mais igual do que duas retas paralelas.

Os símbolos dx e dy para as derivadas em função de x e y foram adotados apenas por Leibniz e não por Newton. O símbolo ∫ para integrais também foi ideia de Leibniz, representando o s da palavra soma. Utilizou ainda sistematicamente a expressão ∫y dx, tal qual nos dias atuais. O termo Cálculo Diferencial e Integral também tem origem nos termos *calculus differentialis* e *calculus integralis*.

Você aprenderá a manipular estes símbolos nas disciplinas de Introdução ao Cálculo, Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais e Cálculo Numérico, agora apenas aproveite a história.

Um dos autores que traz a importante contribuição de Leibniz para a simbologia utilizada atualmente no cálculo é Boyer.

Devemos também a Leibniz os símbolos ~ para 'é semelhante a' e ≅ para 'é congruente a'. No entanto, os símbolos de Leibniz para diferenciação e integração são seus maiores triunfos no campo da notação. Leibniz não é responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra 'função', praticamente no mesmo sentido que é usada hoje (BOYER, 2006 p. 279).

Temos que reconhecer a importância de Leibniz para a Matemática, pois, apesar de dizermos que Newton é o pai do Cálculo, é a notação dele que é mais utilizada nos cursos de Matemática, Física, Química e nas Engenharias em todas as universidades. O único matemático que contribuiu mais do que Leibniz para a linguagem matemática moderna foi o suíço Leonard Euler.

4 LEONARD EULER

Falar de Leonard Euler (1707-1783) é uma missão um tanto quanto fácil. Diferente de outros matemáticos dos quais já falamos, Euler possui alguns diferenciais. O primeiro deles é que, ao contrário de Gauss e Newton, era um ótimo professor. Talvez não tenha sido o melhor professor da história (como alguém poderá definir isto?), porém não apenas suas aulas, mas muitas de suas obras eram bem didáticas.

FIGURA 49 – RETRATO DE EULER

FONTE: Garbi (1997, p. 99)

O segundo diferencial era a agilidade em publicar suas pesquisas e descobertas. Enquanto Descartes, Newton e Gauss levaram anos para fazer suas primeiras publicações, Euler conseguiu publicar mais de 500 artigos durante sua vida. Como se não bastasse sua numerosa coleção de publicações em vida, deixou material para publicações póstumas que levaram 50 anos para serem completamente publicadas.

Após estudar as principais obras de Descartes, Fermat, Newton e Leibniz, entre outros, começou a chegar a suas próprias conclusões. Publicou seus resultados em periódicos que falavam sobre matemática na Suíça, Prússia, França e Rússia.

Atualmente, sua vasta obra está sendo condensada em uma edição completa que trará mais de 886 trabalhos, entre livros e artigos. Esta obra começou a ser organizada em 1909, pela Sociedade Suíça de Ciências Naturais e, apesar de ainda não ter sido completamente organizada, deverá conter mais de 75 volumes.

É lógico que ele não falou apenas de Cálculo, mas nesta área sua contribuição foi tão importante quanto *Os Elementos*, de Euclides, foram para a Geometria. Segundo Eves (2004 p. 474-475), o físico François Arago (1786-1853) afirmou que: "Euler poderia muito bem ser chamado, quase sem metáfora, e certamente sem hipérbole, a encarnação da análise". "Euler calculava sem nenhum esforço aparente, assim como os homens respiram e as águias se mantêm suspensas no ar". Juntou o Cálculo Diferencial e Integral de Leibniz e o Método dos Fluxos de Newton e fundou a Análise em um artigo com o título *Introduction in Analysin Infinitorun*.

Alguém que conheça sua imensa obra pode pensar que não possuía vida familiar muito badalada, assim como Newton ou Descartes, mas, ao contrário, teve com sua esposa Katharina Gsell 13 filhos. Segundo alguns autores, conseguia sem muita dificuldade cuidar das crianças e escrever seus arquivos ao mesmo tempo. "Um amigo que presenciava sua vida doméstica disse: 'Uma criança no colo, um gato sobre o ombro, assim escrevia ele suas obras imortais'". (GARBI, 1997, p. 101).

Assim era Euler, uma figura simpática, cordial, atento à família e, ao longo da vida, colecionou muitos amigos e admiradores. Entre os colegas de profissão, trabalhou com os matemáticos da família Bernoulli, com d'Alembert e muitos outros, com quem dividiu diversos prêmios concedidos por academias e universidades de toda a Europa, sem manter qualquer rivalidade com nenhum deles.

Entre seus admiradores estavam os imperadores da Rússia: Pedro, o Grande, e sua sucessora Catarina, a Grande. Frederico, o Grande, imperador da Prússia, atual Alemanha e Polônia, também possuía grande admiração por ele, e sua sobrinha, a Princesa Phillipine von Schwedt, recebeu aulas de matemática via cartas do suíço.

Devido ao reconhecimento destes grandes personagens da história científica e política, Euler trabalhou na Academia de São Petersburgo na Rússia, na Academia de Berlim na Prússia e na Universidade da Basileia, sua terra natal. O convite para participar destas instituições não se deveu apenas aos seus desenvolvimentos matemáticos, mas também aos seus conhecimentos em Física, Medicina, Teologia, Astronomia e até Línguas Orientais.

4.1 AS NOTAÇÕES E RELAÇÕES DE EULER

Em seus diversos artigos, ensaios e livros, ele aos poucos foi introduzindo uma notação, que perdura até hoje. Leia o que Eves (2004, p. 472-473) escreveu sobre o assunto:

> As contribuições de Euler à Matemática são demasiado numerosas para serem expostas aqui completamente, de modo que apontaremos apenas algumas no plano elementar. Para começar, registraremos que se deve a Euler a implantação das seguintes notações:
>
> | | |
> |---|---|
> | $f(x)$ | para funções; |
> | e | para a base dos logaritmos naturais; |
> | a, b, c | para os lados de um triângulo *ABC*; |
> | s | para o semiperímetro do triângulo *ABC*; |
> | r | para o inraio do triângulo *ABC*; |
> | R | para o circunraio do triângulo *ABC*; |
> | Σ | para somatórios; |
> | i | para a unidade imaginária $\sqrt{-1}$. |

Eves também salienta as relações que Euler descobriu entre algumas constantes e fórmulas:

> Também se deve a ele a notabilíssima fórmula $e^{ix} = \cos x + i \text{ sen } x$, que para $x = \pi$, se transforma em $e^{i\pi} + 1 = 0$, uma igualdade que relaciona cinco dos mais importantes números da matemática. Por processos puramente formais, Euler chegou a um número enorme de relações curiosas, como $i^i = e^{-\pi/2}$, por exemplo.

FONTE: Eves (2004, p. 473)

Sua história de vida poderia ser considerada maravilhosa apenas pela sua numerosa obra ou pelo reconhecimento de ilustres cientistas e imperadores ou por ter sido um pai paciente de 13 filhos, mas sua história de vida não acaba aqui.

4.2 EXEMPLO DE VIDA

Aos 28 anos de idade, Euler perdeu a visão do olho direito. Algumas especulações afirmam que se deveu ao excesso de trabalho, algo que não podemos afirmar com certeza. O fato principal é que a triste situação não abalou seu interesse pelo trabalho e nem reduziu seu ritmo de produção científica. Até aí tudo bem, tendo um olho, ele poderia continuar escrevendo perfeitamente, porém o mais surpreendente começou a acontecer a partir do ano de 1766.

> Durante este ano, Euler soube que estava perdendo a visão do olho que lhe restava, devido à catarata, e preparou-se para a cegueira final praticando escrever com giz numa grande lousa e ditando para seus filhos. Uma operação foi feita em 1771, e durante alguns dias Euler enxergou novamente; mas o sucesso não durou e Euler passou quase todos os últimos dezessete anos de sua vida em total cegueira. Mesmo esta tragédia não deteve o fluxo de sua pesquisa e publicações, que continuou sem diminuição até que, em 1783, aos setenta e seis anos, morreu subitamente enquanto tomava chá com um de seus netos (BOYER, 2006, p. 304).

A partir desse exemplo de vida, devemos pensar na inclusão de pessoas com necessidades especiais nas escolas e no ensino da Matemática. Primeiro, romper a barreira do preconceito, aceitando essas pessoas e utilizando corretamente os meios necessários para que a inclusão possa acontecer. Por isso é preciso que as escolas sejam equipadas com rampas de acesso para cadeirantes, que os livros sejam traduzidos para o Braile, que os educadores aprendam a língua brasileira de sinais (LIBRAS) e que o aluno seja acompanhado por uma pessoa capacitada.

E por segundo, entender que a situação deles não os impedem de pensar e de contribuir para o desenvolvimento da humanidade. Eles precisam ser respeitados em sua deficiência, mas nunca serem taxados de incapazes.

A história de Euler é frequentemente comparada com a do compositor Ludvic van Bethowen, que compôs suas principais obras após ter ficado completamente surdo. A genialidade não é um adjetivo exclusivamente dos matemáticos, e a superação também não é atributo apenas das pessoas comuns.

RESUMO DO TÓPICO 1

Neste tópico você ficou sabendo que:

- O Cálculo Diferencial e Integral nasceu em dois lugares diferentes ao mesmo tempo, através da genialidade de Newton, na Inglaterra, e Leibniz, na Alemanha, e que esses dois matemáticos travaram uma dura batalha pela sua paternidade.

- Newton, além de desenvolver o cálculo, também apresentou trabalhos importantes e revolucionários na área da Física, entre eles a Lei da Gravitação Universal e as três Leis Fundamentais da Mecânica.

- Newton foi presidente da Casa da Moeda Inglesa, da Royal Society e gozava de grande prestígio junto à coroa inglesa, tendo, inclusive, sido declarado cavalheiro do Rei e enterrado na Abadia de Westminster junto à nobreza.

- Leibniz foi injustamente condenado por plágio pela Royal Society e isto abalou sua carreira.

- Apesar de ter sido discriminado, a notação de Leibniz é utilizada ainda hoje nos cursos de Cálculo.

- Outro que contribuiu muito para o desenvolvimento do cálculo e de suas notações foi Leonard Euler.

- Euler foi quem mais escreveu material para publicações matemáticas em toda a história, mesmo depois de ter ficado cego.

- Além de grande matemático, Euler também foi um pai dedicado, que manteve uma vida familiar bem participativa.

- O cálculo não foi apenas uma revolução para a Matemática, mas para toda a Ciência, Engenharia e Economia.

AUTOATIVIDADE

1 O desenvolvimento do cálculo e das leis físicas de Newton no século XVIII fizera com que no século seguinte ocorresse uma revolução no sistema de produção. Qual foi esta revolução e em que ela modificou a vida das pessoas e o sistema econômico?

2 Aos três anos de idade, Newton foi morar com sua avó em Woolstorpe. Por que a mãe dele tomou esta atitude e em que isto influenciou na sua personalidade?

3 O que ocorreu no ano milagroso de 1666?

4 Em que consiste a rivalidade entre Newton e Leibniz?

5 Quais foram os símbolos e expressões criados por Leibniz e que ainda hoje fazem parte da linguajem do cálculo?

6 Euler criou mais símbolos e expressões que Leibniz. Escreva-os e aponte quais deles você já conhece.

7 Converse com seus colegas de classe sobre algum(a) acadêmico(a) com deficiência física ou mental que você conheceu e que apesar das dificuldades surpreendia a todos em algumas atividades.

TÓPICO 2

HISTÓRIA DA ESTATÍSTICA E DAS PROBABILIDADES

1 INTRODUÇÃO

Dependendo do que uma pessoa considera estatística, boa parte dessa história já foi contada. Na Unidade 1, falamos dos processos de contagens de animais e pessoas que os povos primitivos faziam e que assim desenvolveram os sistemas de numeração. Para alguns, então, a estatística nascia ali. Para outros, mais criteriosos, talvez, a estatística tenha nascido apenas nos sistemas de controle dos grandes impérios ou durante os grandes censos.

Neste caso, já falamos dos escribas no Egito que, sempre após as cheias, contavam toda a produção de alimentos, escravos e pessoas do império, e dos mesopotâmicos que também praticavam a contagem de pessoas e rebanhos. Já falamos também dos quipos utilizados pelos incas para avaliar o tamanho da população e controlar os estoques de alimentos. Estas contagens eram contínuas, sempre que acontecia um nascimento ou que era feito uma colheita, os dados eram atualizados. Falaremos agora sobre os grandes censos realizados de tempos em tempos.

2 OS GRANDES CENSOS DA ANTIGUIDADE

Um dos primeiros grandes censos de que se tem notícia aconteceu por volta de 2238 a.C. por ordem do Imperador Chinês Yao ou Yu. Este imperador é considerado pela tradição chinesa o imperador da unificação do Império Chinês. Yao era engenheiro e pretendia construir várias obras em todo o império. O objetivo do imperador era saber a quantidade de seus súditos, o tamanho de suas lavouras e rebanhos, além de identificar e quantificar as potencialidades comerciais de cada província do império. Tais informações seriam mais tarde de fundamental importância para a cobrança de impostos, formação do exército, execução de obras estratégicas e o natural fortalecimento do Império Chinês.

Na Bíblia Sagrada existe o Livro dos Números. Este livro traz detalhadamente um censo feito por Moisés e Arão, dois anos após a saída dos israelitas do Egito.

> A primeira contagem do povo. No segundo ano depois da saída dos israelitas do Egito, no dia primeiro do segundo mês, o Senhor Deus falou com Moisés no deserto do Sinai, na Tenda Sagrada. Ele disse: – Você e Arão devem fazer a contagem do povo de Israel por grupos

> de famílias e por famílias. Façam a lista de todos os homens de vinte anos para cima, isto é, todos os que já têm idade para o serviço militar. Vocês chamarão um chefe de grupo de famílias de cada tribo para ajudá-los. (BÍBLIA, A. T. Números, 1:1-4).

O Livro dos Números traz ainda o resultado do censo, as ordens e as regras para ocupação do território, a formação dos exércitos e outras orientações de ordem social e religiosa. Apesar do cunho religioso com que a Bíblia Sagrada trata o fato, podemos ver que o censo obedeceu ao método científico de execução e apresentação dos resultados.

Os romanos também estabeleceram formas e critérios para a realização dos censos. Durante o governo republicano, iniciado em 509 a.C., os patrícios, classe dominante da Antiga Roma, desenvolveram uma organização descentralizada de governar. Criaram cargos magistrados para desempenhar funções específicas no império, como é o caso dos censores, responsáveis pela contagem de cidadãos baseados na renda. Com base nesses dados, classificavam as pessoas segundo a renda.

Em cada nova região dominada, faziam acontecer um censo para avaliar a quantidade de escravos, e calcular as riquezas conquistadas. Os conquistados eram contados separadamente para saber a quantidade de homens, mulheres, crianças, velhos, bem como suas habilidades profissionais. Com esses dados, entre outras providências, estabeleciam quantos soldados deveriam manter naquela região. Do ano de 555 a.C. até 72 d.C., os romanos realizaram 72 censos, uma média aproximada de um censo a cada 8 anos. Foi durante um grande censo ocorrido na Palestina, por ordem dos imperadores romanos, que aconteceu uma das mais bonitas histórias já narradas.

2.1 UMA BONITA HISTÓRIA

> Naquele tempo o imperador Augusto mandou uma ordem para todos os povos do Império. Todas as pessoas deviam se registrar a fim de ser feita uma contagem da população. Quando foi feito esse primeiro recenseamento, Cirênio era governador da Síria. Então todos foram se registrar, cada um na sua própria cidade. Por isso José foi de Nazaré, na Galileia, para a região da Judeia, a uma cidade chamada Belém, onde tinha nascido o rei Davi. José foi registrar-se lá porque era descendente de Davi. Levou consigo Maria, com que tinha casamento contratado. Ela estava grávida, e aconteceu que, quando se achavam em Belém, chegou o tempo de a criança nascer. Então Maria deu à luz o primeiro filho. Enrolou o menino em panos e o deitou em uma manjedoura, pois não havia lugar para eles na pensão (BÍBLIA, N.T. Lucas, 2:1-7).

Isto mesmo, estamos falando da história do Natal. Esta história se deu em meio a um censo estatístico ordenado pelo Império Romano que na época havia dominado aquela região.

FIGURA 50 – IMAGEM DE NATAL

FONTE: Disponível em: <http://servicoeducativomarioneta.blogspot.com/2009_11_01_archive.html>. Acesso em: 1 nov. 2010.

Observe a história, ela revela que nesse censo foi aplicado um método que gerou muitos transtornos para a população. Imagine um homem sair com toda sua família em direção à sua terra natal para que lá ele pudesse ser contado em um censo. Não foi apenas um homem que teve que sair de sua casa e ir para a sua terra natal com a família, milhares de pessoas tiveram que fazer o mesmo. Foi por causa disso que faltaram lugares nas hospedarias.

Imagine se atualmente no Brasil fosse aplicado este método para contagem da população. Fatalmente as cidades não suportariam o fluxo de pessoas que retornariam para serem cadastradas. As estradas ficariam engarrafadas, os meios de transportes abarrotados e os hotéis e hospedarias superlotados, principalmente nas grandes cidades, o caos se instalaria de forma assustadora.

Foi exatamente isso que aconteceu em Belém. Vieram belenenses de diversas partes. Como as hospedarias estavam cheias, José e sua esposa Maria tiveram que se acolher em uma estrebaria, e nessa estrebaria, entre animais e homens do campo que nasceu o menino Jesus. Daí para frente toda esta história nós já sabemos.

Este fato histórico e religioso é celebrado anualmente em dezembro, combinando com o final do ano escolar e início das férias. Nas escolas, esse período é marcado, não só por exames, aprovações e reprovações, mas também por atividades que lembram e comemoram a chegada do natal. Nesse tipo de atividades, os professores de Matemática ficam procurando meios de integrar a disciplina com o tema.

Fica então a sugestão de utilizar o Natal para trabalhar em sala de aula os assuntos de estatística e censo. O professor pode ler a história buscando nela outro foco, explicando o que é um censo e detalhando o processo aplicado na época. Mostrar que foi este método que levou a falta de hospedagem e ao consequente nascimento do menino na manjedoura. No mesmo instante faz uma ponte entre os censos antigos e os atuais, pode em seguida começar a trabalhar estatística.

Atualmente os censos são feitos de forma muito mais eficaz e menos traumático para a população. O recenseador passa de casa em casa coletando informações que mais tarde farão parte de um relatório completo sobre as características das cidades, dos estados e dos países. No Brasil os censos são feitos pelo IBGE, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

3 O IBGE

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE – é um dos mais respeitados institutos de pesquisas do mundo. Seus métodos altamente científicos, aplicados nos censos realizados a cada 10 anos no país, e a confiança de seus dados fazem deste órgão um dos mais importantes para o desenvolvimento do Brasil.

FIGURA 51 – LOGO DO IBGE

FONTE: Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/>. Acesso em: 1 nov. 2010.

Segundo o próprio *site* do IBGE, ele foi criando em 1934 e instalado em 1936 sob o nome de Instituto Nacional de Estatística – INE, sendo transformado no ano de 1938 em IBGE. Vale lembrar também que, no ano de 1911, foi criado no Brasil a "*Direcção Geral de Estatística – DGE*". Na verdade a DGE era originalmente um órgão português, com ramificações em todas as colônias, e, com a Independência do Brasil, manteve seus trabalhos no país sob o comando do novo imperador, passando a ser um órgão brasileiro, mantendo o nome antigo.

O IBGE, além de realizar o censo decenalmente, também é responsável pelo levantamento geográfico territorial brasileiro, definindo limites entre estados e municípios, regularizando fronteiras com países vizinhos, bem como descrevendo e classificando características do relevo, clima, vegetação, atividades econômicas, culturais e características sociais de cada região.

Outra atividade do IBGE é o resgate, organização e publicação de dados estatísticos e geográficos realizados historicamente no país. Recentemente publicou o segundo volume de uma coleção que totalizará quatro livros, apresentando os resultados de censos desde o Brasil Imperial até os dias atuais. Traz ainda os métodos empregados em cada período histórico dos censos estatísticos no país.

Em seu *site* podemos encontrar o resultado de uma série de censos históricos realizados desde o Brasil Colonial:

QUADRO 5 – HISTÓRICO DA POPULAÇÃO BRASILEIRA - ESTIMATIVAS DA POPULAÇÃO - 1550-1870

Anos	**Estimativas da População**	**Anos**	**Estimativas da População**
1550	15.000	1817	3.300.000
1576	17.100	1819	4.396.132
1583	57.000	1820	4.717.000
1600	100.000	1823	3.960.866
1660	184.000	1825	5.000.000
1690	242.000	1827	3.758.000
1700	300.000	1830	5.340.000
1766	1.500.000	1834	3.800.000
1770	2.502.000	1835	5.777.000
1775	2.666.000	1840	6.233.000
1776	1.788.480	1845	6.725.000
1780	2.523.000	1850	8.000.000
1785	3.026.000	1854	7.677.800
1790	3.225.000	1855	7.829.000
1795	3.435.000	1860	8.448.000
1798	2.888.078	1865	9.114.000
1800	3.250.000	1867	11.780.000
1805	3.900.000	1868	11.030.000
1808	2.424.463	1869	10.415.000
1810	3.617.900	1870	9.834.000
1815	2.860.525		

FONTE: Adaptado de: <http://www.ibge.gov.br/home/>. Acesso em: 11 out. 2010.

Dados como estes, disponíveis no *site* no IBGE, podem ser livremente utilizados em sala de aula para fins didáticos, despertando a curiosidade dos alunos para o tema e estabelecendo uma relação interdisciplinar com a História e a Geografia. Enquanto o professor de Matemática trabalha Estatística, o de História faz relações entre os valores das tabelas e os períodos da História do Brasil e o professor de Geografia pode analisar as características da população ao longo da história.

Até agora, tratamos a estatística como uma área da matemática utilizada para levantamento de características das populações com objetivos políticos, econômicos e sociais. No entanto, a estatística vai mais além. A estatística é utilizada por institutos de pesquisas médicas e biológicas para o desenvolvimento de medicamentos, tratamentos, dietas e diagnósticos. Esta área da ciência utiliza a estatística associada à probabilidade. Enquanto que a estatística já faz parte da história da humanidade desde a antiguidade, a probabilidade é uma área nova que apenas começou a ser estuda no século XVIII.

4 HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

Durante o século XVIII, deu-se na Europa um grande avanço das companhias de seguro. Em seu encalço cresceu muito a estatística e mais ainda a probabilidade. No século anterior, alguns matemáticos, como Fermat e Pascal, já estudavam a probabilidade com a finalidade de entender a lógica de alguns jogos de mesa, muito comuns nos salões de festas na Europa, mas foi Abraham De Moivre (1667-1754) que deu um grande impulso da probabilidade aplicada à Estatística.

FIGURA 52 – ABRAHAM DE MOIVRE

FONTE: Disponível em: <http://www.ams.org/mathmedia/images/md-200705-demoivre.jpg>. Acesso em: 1 nov. 2010.

Seus livros *Doctrines of Chances* e *Miscellanea Analytica* foram os primeiros da história a explorarem a curva normal. É atribuindo ainda a De Moivre a fórmula $n! \approx (2\pi n)^{1/2} e^{-n} n^n$, para cálculo de fatoriais de números muito grandes.

DICAS

Você estudará a curva normal e suas aplicações de forma mais aprofundada nas disciplinas de Estatística e de Probabilidade e Estatística. O formato dessa curva é semelhante ao de um sino e é utilizada no cálculo de probabilidades para distribuições normais.

Após De Moivre ter estudado esta curva, largamente aplicada pelas companhias de seguro, outro que fez uso dela foi o já mencionado Gauss. O seu objetivo com a Estatística, a probabilidade e a curva normal era aferir os equipamentos de observação e medida do observatório astronômico de Göttingen. Gauss desenvolveu diversos relatórios sobre a teoria dos erros. Tanto ele utilizou esta curva que ela também é conhecida como Curva de Gauss.

Quando medimos a largura de uma folha de papel com uma régua, dificilmente erramos a medida, e nos dias seguintes, se retornarmos a medir a mesma folha com a mesma régua, fatalmente encontraremos a mesma medida. Já quando falarmos de telescópios e medidas de distâncias entre corpos celestes, a situação é completamente diferente, pois além dos corpos estarem em constante movimento, temos a influência de atividades atmosféricas que levam a erros consideráveis. Foi para corrigir esses erros que Gauss utilizou a curva normal. É ainda atribuída a ele a teoria dos quadrados mínimos.

Assim como a estatística e a probabilidade foram utilizadas por Gauss para a certificação de medidas, outros pesquisadores também aplicaram as mesmas técnicas em áreas como a física, química, biologia e medicina.

No século XIX, Lambert Adolphe Jacques Quételet (1796-1874) aplicou métodos estatísticos ao estudo da sociologia e do corpo humano, e por isso é chamado de “fundador da estatística moderna”. Seu trabalho também recebeu várias críticas, principalmente dos estudiosos das Ciências Humanas. Seus estudos influenciaram a criação de institutos de pesquisa nos principais países da Europa e, mais tarde, em todos os países do mundo.

Também é atribuído a Quételet a fórmula do IMC, Índice de Massa Corpórea. Essa fórmula define, a partir do peso e da altura de uma pessoa, um valor que, segundo uma tabela, define se ela é obesa, magra ou normal.

$$\text{IMC} = (\text{peso em quilogramas}) \div (\text{altura em metros})^2$$

QUADRO 6 – ESTADO NUTRICIONAL

IMC (kg/m²)	Estado Nutricional
Menor que 18,5	Baixo peso
18,5 a 24,99	Peso adequado
25 a 29,99	Sobrepeso
Maior que 30	Obesidade

FONTE: Disponível em: <http://portal.saude.gov.br/portal/aplicacoes/noticias/default.cfm?pg=dspDetalheNoticia&id_area=124&CO_NOTICIA=11458>. Acesso em: 1 nov. 2010.

Outros que se destacaram entre os séculos XIX e XX foram Wilhelm Lexis (1837-1914), que criou as ideias de "dispersão" e de "dispersão normal", e Karl Pearson (1857-1936). "Pearson desenvolveu métodos matemáticos gerais e adequados para a análise de estatísticas biológicas. A ele se deve os termos 'moda', 'desvio padrão' 'e coeficiente de variação'" (CAJORI, 2007, p. 491). Você ficará bem familiarizado com estes termos durante o estudo das disciplinas de Estatística e de Probabilidade e Estatística.

A Estatística se desenvolveu muito ao longo do século XX, ganhando respeito e importância no cenário científico e político. Com o crescente interesse de governos e de instituições científicas pelo assunto, e com o surgimento dos computadores, podemos dizer que esta é uma área em franco desenvolvimento.

FIGURA 53 – KARL PEARSON

FONTE: Disponível em: <http://www.economics.soton.ac.uk/staff/aldrich/New%20Folder/kpreader1.htm>. Acesso em: 1 nov. 2010.

RESUMO DO TÓPICO 2

Você viu neste tópico que:

- Desde a Antiguidade, os grandes censos eram realizados pelos governos com finalidades econômicas, militares e logísticas.

- A história do Natal aconteceu em meio a um censo.

- O IBGE faz o censo no Brasil a cada 10 anos e disponibiliza no *site* seus resultados.

- Como surgiu a probabilidade e que ela é amplamente aplicada na Estatística.

AUTOATIVIDADE

1 Qual atividade econômica impulsionou o desenvolvimento da probabilidade e da Estatística?

2 Segundo a Bíblia Sagrada, Deus apareceu para Moisés e pediu que fizesse um censo com todo o povo judeu. Por que Deus mandou fazer este censo? Por que ele não deu direto o resultado do censo?

3 Entre no *site* do IBGE e anote os seguintes resultados do último censo:

a) população total do Brasil;
b) população total por região;
c) quantidade de homens e mulheres;
d) algum resultado que surpreendeu você.

HISTÓRIA DA TEORIA DOS CONJUNTOS

1 INTRODUÇÃO

Os fundamentos da Matemática passaram por algumas grandes revoluções ao longo da história. A primeira foi o surgimento dos números irracionais no século V a.C. através da medida da diagonal do quadrado de lado unitário. Quando os pitagóricos perceberam que esse segmento de reta não poderia ser expresso na forma de fração, iniciou uma crise que só foi superada com a aceitação dos números irracionais no século seguinte. A segunda foi já no século XVII, quando surgiu o Cálculo Diferencial e Integral baseado na teoria dos infinitésimos e mais tarde aprimorada pela teoria dos limites. Esta teoria com a Geometria Analítica revolucionou não apenas a geometria, mas também a álgebra e a análise.

A última grande revolução ocorrida nos Fundamentos da Matemática foi no final do século XIX com o surgimento da Teoria dos Conjuntos de Georg Cantor (1845-1918). Essa teoria atualmente está presente em todas as áreas da Matemática, sem exceção. A partir dela novas áreas de estudo surgiram dentro da Matemática e influenciou outras ciências como a Computação e a Filosofia.

2 A TEORIA DOS CONJUNTOS

A Teoria dos Conjuntos é algo muito mais amplo do que o ensinado no Ensino Fundamental e Médio. Nesse nível são transmitidas as noções de conjunto, subconjunto, elementos e as relações entre conjuntos. Também são apresentadas as notações de conjuntos e de conjunto vazio, unitário, finito e infinito. A respeito desse assunto, o Professor Elon Lages Lima Recomenda: “Evite dizer ‘Teoria dos Conjuntos’. Esta teoria existe, mas, nesse nível, está apenas introduzindo a linguagem e a notação dos conjuntos. Não há teoria alguma aqui” (LIMA et al., 2006, p. 2).

Estas noções intuitivas de conjunto são importantes para o estudo de outras áreas da Matemática que são ensinadas na Educação Básica, como, por exemplo, os conjuntos numéricos, a geometria e as funções. É lógico que um pouco de Teoria dos Conjuntos o aluno também aprende. É o caso de quando o professor explica que existem os conjuntos infinitos contáveis e os conjuntos infinitos incontáveis, mas não chega a se aprofundar no assunto.

DICAS

Você estudará os Conjuntos e Teoria dos Conjuntos, de forma mais aprofundada, nas disciplinas de Introdução ao Cálculo, Álgebra, Lógica Matemática e Análise Matemática.

Para alunos da Educação Básica, compreender a noção de conjunto serve de suporte para o aprendizado de outras áreas estudadas no Ensino Médio e Fundamental.

3 APLICAÇÕES DOS CONJUNTOS NO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Uma das primeiras aplicações dos conjuntos que o professor pode fazer em sala de aula é na Geometria. Quando o professor no 6º ano mostra que todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado, pode utilizar a notação de conjunto para facilitar esta compreensão, veja:

R = {Todos os Retângulos}
Q = {Todos os Quadrados}

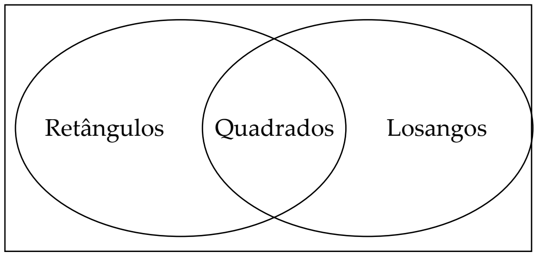
Como todos os quadrados são retângulos, então os quadrados fazem parte do conjunto dos retângulos: $Q \subset R$. No entanto, existem retângulos que não são quadrados, então: $R \not\subset Q$.

Observando as definições de retângulo, losango e quadrado, podemos concluir que o conjunto dos quadrados é a intersecção entre o conjunto dos retângulos com o dos losangos.

R = {Todo Quadrilátero com quatro ângulos retos}
L = {Todo Quadrilátero com quatro lados iguais}
Q = {Todo Quadrilátero com quatro ângulos retos e quatro lados iguais}

Desta forma, um quadrado é ao mesmo tempo um retângulo e um losango.

FIGURA 54 – DIAGRAMA DOS QUADRADOS, LOSANGOS E RETÂNGULOS



FONTE: O autor

Na geometria analítica, todo ponto que pertence a uma reta está associado a um par ordenado que satisfaça a equação da reta. Quando os pares ordenados de três pontos satisfazem a equação de uma reta, podemos dizer que eles são colineares ou que pertencem à mesma reta. Desta forma, podemos dizer que uma reta é um conjunto com infinitos pontos, infinitos segmentos de retas e infinitas semirretas. Essas condições de pertinência continuam entre retas e planos, pontos e circunferências e diversas outras relações entre figuras geométricas.

Na Álgebra, os conjuntos também possuem aplicações importantes. Uma equação do segundo grau, por exemplo, possui um conjunto solução. As soluções de $x^2 – 6x + 5 = 0$ são $x = 2$ e $x = 3$, ou seja, o conjunto solução é: $S = \{2 , 3\}$. Quando uma equação quadrática não possui solução, dizemos que o conjunto solução é vazio. A mesma situação se estende às inequações e aos sistemas de equação.

Em um sistema SPD (Sistema Possível e Determinado), existe apenas uma solução e seu conjunto solução é unitário; em um sistema SPI (Sistema Possível e Indeterminado), existem infinitas soluções e seu conjunto solução é infinito; e em um sistema SI (Sistema Impossível), o conjunto solução é vazio, pois não possui solução.

Outra área que mudou muito depois do surgimento dos conjuntos foi a das funções. Quem estuda funções se dá logo no início com os conceitos de domínio, imagem e contradomínio de uma função, geralmente descritos por conjuntos. A classificação das funções em injetoras, sobrejetoras e bijetoras também são de mais fácil compreensão com o auxílio dos conjuntos. A visualização permitida pelos diagramas faz com que o próprio conceito de função seja mais acessível para alunos e educadores.

Quando no 2º ano do Ensino Médio, ou em disciplinas de Estatística nas universidades, o professor passa a ensinar probabilidades, também faz uso dos conjuntos. Veja a definição de probabilidade encontrada:

Probabilidade

Dado um experimento aleatório, sendo **S** seu espaço amostral, vamos admitir que todos os elementos de **S** tenham a mesma chance de acontecer, ou seja, que **S** é um **conjunto equiprovável**.

Chamamos de **probabilidade de um evento A** ($A \subset S$) o número real P(A), tal que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

onde:

n(A) é o número de elementos de **A**;
n(S) é o número de elementos de **S**.

FONTE: Crespo (2009, p. 124)

Perceba que todos esses temas apresentados são anteriores ao desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos. Isto nos permite imaginar o impacto que as ideias de Cantor provocaram na Matemática e na ciência como um todo.

4 GEORG CANTOR, O PAI DA TEORIA DOS CONJUNTOS

Nascido em S. Petersburgo, Rússia, em 1845, Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, aos doze anos de idade, mudou-se com seus pais para a cidade de Frankfurt, na Alemanha. Seu pai era dinamarquês de origem judaica, convertido ao protestantismo, sua mãe era católica, mas também de família judaica convertida. Este ambiente familiar de diversas religiões despertou seu interesse pela Teologia, principalmente a medieval, com seus argumentos sobre o infinito.

FIGURA 55 – GEORG CANTOR

FONTE: Eves (2004, p. 616)

Do infinito teológico para o científico foi um pulo que o levou a estudar Física e, principalmente, Matemática. Depois de ter estudado Teoria dos Números, Equações Indeterminadas, Séries Trigonométricas e Análise, desenvolveu a Teoria dos Conjuntos e Teoria do Infinito. Seu revolucionário trabalho sobre Teoria dos Conjuntos começou em 1874, sendo publicado no mesmo ano pelo *Journal de Crelle*. Nesse artigo, também tratou dos conjuntos infinitos e transfinitos. Nessa época, Cantor já havia terminado seu doutorado na Universidade de Berlim em 1867 e estava lecionando na Universidade de Halle desde 1869.

Seus diversos artigos nessa área logo geraram dúvidas e conflitos entre os matemáticos desse período. Ninguém propõe uma revolução como a de Cantor sem encontrar opositores. Um dos maiores críticos de sua obra foi Leopold Kronecker (1823-1891), que considerava seu trabalho muito mais da área teológica do que matemática. A posição importante do opositor na Academia de Ciências de Berlim e na universidade dessa mesma cidade prejudicou muito a carreira de Cantor. Kronecker era radicalmente contra as ideias de Cantor, principalmente sobre o infinito e, devido à sua posição privilegiada, não aceitou a admissão de Cantor para o cargo de professor de Matemática na universidade que atuava. Devido à radical oposição de Kronecker, Cantor trabalhou em Halle até 1905. Apesar de Kronecker ter sido um matemático brilhante, ele entra para a história não pela sua obra, mas pela contestação e perseguição das obras de Cantor.

Em 1883, Cantor defendeu suas ideias na obra *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Fundamentos de uma teoria geral das multiplicidades). Essa obra gerou ainda mais manifestações contrárias às suas ideias e, no ano seguinte, teve seu primeiro esgotamento mental devido a diversas tentativas de rebater os muitos ataques que havia recebido.

Durante o resto de sua vida, sofreu com doenças neurológicas, fruto do esgotamento nervoso. Por diversas vezes, foi recolhido a instituições de tratamento de doentes mentais. Não é possível saber se as constantes críticas à sua obra causaram esse tipo de sofrimento ou se era algo natural que inevitavelmente atacaria sua mente genial. O mais impressionante é que, sempre que saía do tratamento, sua capacidade de trabalho parecia redobrada. Dessa forma, alternando-se entre crises cada vez mais terríveis e períodos de genial produção matemática, seu sofrimento se estendeu até 1918, ano de sua morte em um hospital para doentes mentais em Halle.

Uma das poucas homenagens que recebeu em vida foi em 1915, no seu aniversário de 70 anos. Todavia, por causa das guerras que assolavam a Europa no início do século XX, poucos ilustres puderam comparecer.

A obra de Cantor não conquistou apenas opositores. Muitos matemáticos passaram a admirar e utilizar sua obra em pesquisas, relacionando-as com outras áreas da Matemática.

5 INFLUÊNCIAS DA TEORIA DOS CONJUNTOS

Já vimos alguns setores da Matemática ensinados no Ensino Médio que sofreram grandes mudanças com a criação da Teoria dos Conjuntos. Vamos observar agora algumas áreas que foram fortemente afetadas e que são ensinadas apenas em cursos de nível superior.

A primeira delas é a Análise Matemática. O estudo que Cantor fez sobre os conjuntos infinitos revolucionou certezas históricas nessa área. Desde a Grécia Antiga que os matemáticos afirmavam: "O todo é maior que qualquer uma de suas partes". Contudo, Cantor questionou isto da seguinte forma: Tomamos o conjunto dos números Naturais e o conjunto os números pares. Alguém mais desatento diria que o conjunto dos Naturais é maior que o dos pares, afinal nos Naturais existem números que não pertencem ao conjunto dos pares. No entanto, estes dois conjuntos são infinitos, o que levou Cantor a concluir que, apesar de um pertencer ao outro, os dois têm o mesmo tamanho. O postulado grego não valia para conjuntos infinitos.

Este estudo sobre análise, associado a outros na geometria, inaugurou uma área completamente nova da Matemática, chamada de Topologia. Seu nome é frequentemente confundido por leigos com Topografia, que estuda as curvas de níveis de um terreno, bairro, região etc. A Topologia é algo tão recente que é vista apenas no meio acadêmico, em cursos de Bacharelado em Matemática. Até o século XIX era vista como um ramo da geometria, mas no século XX, sob influência da Teoria dos Conjuntos, passou a ser considerada uma área de estudo autônoma. Não se sabe ao certo quem foi o primeiro a consolidar a Topologia.

> Dizem alguns que a Topologia começou com a *Analysis Situs* de Poincaré, outros que data da Teoria dos Conjuntos de Cantor, ou talvez do desenvolvimento dos espaços abstratos. Outros ainda consideram Brouwer o fundador da Topologia, especialmente devido a seus teoremas de invariança topológica de 1911 e à fusão que efetuou dos métodos de Cantor com os da *Analysis Situs*. De qualquer forma, com Brouwer, começou o período da evolução intensiva da Topologia que continuou até hoje (BOYER, 2006, p. 432).

DICAS

Você terá uma introdução à Topologia na disciplina de Análise Matemática.

Outra importante área é a Lógica Matemática. As contribuições da Teoria dos Conjuntos vão desde semelhanças entre símbolos utilizados nas duas áreas, até a mudança de concepção de alguns conceitos, principalmente relativos a definições. A combinação da Lógica Matemática com a Álgebra Booleana é a parte Matemática que mais contribuiu para o surgimento dos computadores no século passado.

Um dos matemáticos que mais contribuiu para este desenvolvimento foi o inglês John Venn (1834-1923). Ficou muito conhecido, por aproximar os símbolos da Teoria dos Conjuntos aos da Lógica e ter sido o primeiro a utilizar desenhos para representar união, intersecção e outras operações entre conjuntos. Esta representação foi tão bem aceita que ficou conhecida como Diagrama de Venn.

Os assuntos que acabamos de comentar são, sem dúvida, o que há de mais moderno em pesquisas matemáticas. Do jeito que abordamos esses assuntos até aqui, parece que somente os europeus estavam fazendo pesquisas em Matemática. Realmente, os resultados alcançados pela Europa nos últimos séculos se sobressaem ao resto do mundo. Isto se dá pelos fortes investimentos que os governos daquele continente têm dado à pesquisa em diversas áreas, entre elas a Matemática.

Todavia, existem outros países que estão investindo em pesquisa desde o século XVII, como os Estados Unidos, o Japão, o Canadá e a China. No Brasil, esse tipo de investimento somente começou a ser feito a partir do século XX. Foi nesse século que foi fundado o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

6 IMPA – INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Após séculos à margem do que acontecia em termos de ciência no mundo, o governo brasileiro decidiu iniciar seus investimentos nessa área. No ano de 1950 foi criado o CNPq – Conselho Nacional de Pesquisa – com o objetivo de fomentar o desenvolvimento científico no país. A primeira unidade de pesquisa fundada pelo CNPq foi o IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, no ano de 1951. O objetivo principal desse instituto é a pesquisa científica em Matemática Pura e Aplicada, a formação de pesquisadores e professores em níveis de Mestrado, Doutorado e Pós-Doutorado, e a difusão e o aprimoramento da cultura matemática no país.

FIGURA 56 – LOGO DO IMPA

FONTE: Disponível em: <http://www.impa.br/opencms/pt/>. Acesso em: 1 nov. 2010.

Desde 1957, o IMPA realizou o Colóquio Brasileiro de Matemática, com o objetivo de integrar os matemáticos pesquisadores e professores de alto nível do país, bem como manter uma unidade nacional nessa área. O evento é realizado de dois em dois anos no Rio de Janeiro e, a cada ano, ganha mais prestigio nacional e internacional devido ao alto nível dos trabalhos brasileiros apresentados e à presença de matemáticos importantes de diversas partes do mundo.

Outra atividade promovida é o intercâmbio com outros institutos de diversos países. Através desse fato, as atividades de pesquisa se tornam cada vez mais diversificadas. A assinatura de periódicos de diversas instituições matemáticas e a aquisição de obras importantes faz com que seu acervo seja um dos mais completos e importantes do mundo.

Os livros do Projeto Euclides e da Coleção Matemática Universitária, publicados pelo IMPA, são utilizados por diversas universidades brasileiras. O objetivo dessas coleções é facilitar a aprendizagem e estimular o interesse de alunos de graduação e pós-graduação pela pesquisa matemática.

Suas áreas de pesquisa atualmente são: Álgebra e Geometria Algébrica, Análise - Equações Diferenciais Parciais e Dinâmica dos Fluidos, Computação Gráfica, Economia Matemática, Geometria Diferencial, Pesquisa Operacional e Otimização, Probabilidade e Sistemas Dinâmicos. Seus pesquisadores, fora dos períodos de intercâmbio, realizam suas atividades na sede do instituto que fica no Rio de Janeiro.

Através da SBM – Sociedade Brasileira de Matemática –, que funciona em sua sede, são promovidas as Olimpíadas Brasileiras de Matemática – OBM, e as Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, que selecionam e incentivam a participação de estudantes brasileiros nas olimpíadas internacionais de Matemática. Os melhores colocados nessas olimpíadas recebem bolsas de estudo para cursos de Matemática.

A SBM também publica periodicamente a Revista do Professor de Matemática, realiza cursos de aperfeiçoamento de professores do Ensino Médio e lança obras de cunho pedagógico para a Educação Básica.

Segundo o Ministério de Ciência e Tecnologia, o trabalho realizado pelo IMPA e o prestígio que goza nacionalmente e internacionalmente, faz dele um instituto modelo no país para todas as outras áreas da ciência e pesquisa. É por esses motivos que o IMPA faz parte da recente história da Matemática brasileira.

RESUMO DO TÓPICO 3

Nesse tópico, você estudou:

- A Teoria dos Conjuntos representa uma grande revolução na Matemática, que atualmente está presente em todas as suas áreas.

- Esta teoria é aplicada em muitos conteúdos ensinados no Ensino Fundamental e Médio.

- Seu criador, Georg Cantor, não era bem aceito no meio acadêmico por defender essa teoria. Os frequentes ataques às suas ideias, possivelmente, o levaram a desenvolver doenças mentais.

- John Venn também contribuiu para o desenvolvimento dessa teoria.

- A partir da Teoria dos Conjuntos outros campos de estudos surgiram na Matemática.

- O IMPA é uma das melhores instituições de pesquisas matemáticas do mundo e é subordinado ao Ministério da Ciência e Tecnologia.

AUTOATIVIDADE

1 Qual outra área do conhecimento, estudada por Cantor, o fez pesquisar o Infinito e a Teoria dos Conjuntos?

2 Por que Cantor não foi aceito como professor na Universidade de Berlim?

3 Quais conteúdos do Ensino Médio fazem uso da linguagem dos conjuntos?

4 Faça um diagrama de Venn para representar o conjunto dos quadriláteros = Q, dos paralelogramos = P e dos retângulos = R.

5 Entre no *site* do IMPA e descubra como se faz para se cadastrar na sociedade brasileira de matemática e quais as vantagens de ser membro dessa sociedade.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo deste livro de Estudos, vimos diversos motivos para o uso da História da Matemática no ensino. Em cada unidade e em cada tópico procuramos apresentar não apenas a História em si, mas também como e em quais momentos tais conhecimentos podem ser utilizados em sala de aula, a fim de facilitar o aprendizado do aluno ou de despertar nele um interesse pela disciplina.

Depois dessas situações práticas de utilização da história da Matemática em sala de aula, apresentadas em meio a fatos e biografias relativos à evolução da Matemática, nós veremos um pouco sobre os teóricos que falam sobre a aplicação desse assunto em sala de aula e como ela foi utilizada nas mais diversas tendências de ensino.

2 UBIRATAN D'AMBROSIO

Se até o século XIX não tínhamos representante brasileiro entre os grandes nomes da Matemática, no século passado chegou a nossa vez, e numa área completamente nova e inusitada, a Educação Matemática. Ubiratan D'Ambrosio nasceu em São Paulo em 1932. Graduou-se no Curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática pela USP – Universidade de São Paulo; fez seu doutorado na Escola de Engenharia de São Carlos/SP; foi professor em diversas instituições de ensino superior no Brasil e no exterior, onde atuou principalmente na Educação Matemática.

Os estudos de D'Ambrosio foram justamente entre a história e a educação matemática, criando uma nova área chamada Etnomatemática. Contudo, antes de nos aprofundarmos nesse assunto, vamos compartilhar algumas opiniões dele sobre a história da Matemática na sala de aula.

Ubiratan partiu da seguinte pergunta: "Para que serve a história da Matemática?". Em seguida respondeu:

Algumas das finalidades principais parecem-me:

1. para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução;

2. para mostrar que a Matemática que se estuda na escola é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade;

3. para destacar que esta Matemática teve sua origem nas culturas da Antiguidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média, e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio;

4. e desde então foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas e se tronou indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico.

FONTE: D'Ambrosio (1996, p. 10)

FIGURA 57 – UBIRATAN D'AMBROSIO

FONTE: Disponível em: <http://cimm.ucr.ac.cr/ciaemPortugues/index.php?option=com_content&view=article&id=77&Itemid=73>. Acesso em: 1 nov. 2010.

D'Ambrosio faz uma dura crítica a conteúdos dos currículos escolares que não possuem mais aplicação e são incessantemente cobrados sem um questionamento por partes dos professores ou dos alunos. Na maioria das vezes, esses conteúdos ainda estão nos currículos por tradição, por terem sido importantes no passado. Sendo assim, eles até podem permanecer nos currículos, desde que seu ensino seja associado aos fatores históricos que fizeram deles tão importantes.

Assim sendo, eles cumprem um papel formativo do aluno no sentido da evolução da Matemática, não apenas como ciência, mas como necessidade humana.

Se os professores e alunos compreenderem que a Matemática é diferente em cada momento da história, passarão a se importar com a matemática que os rodeia: no mercado, nas empresas, nas construções e em diversas outras áreas. Assim, teremos uma Matemática social e verdadeiramente interessante para os estudantes.

Esta matemática não é mais algo que está apenas dentro da sala de aula, mas faz parte da cultura de cada etnia, tal qual a religião, a língua, e as atividades econômicas. É por isso que Ubiratan D'Ambrosio difundiu o termo Etnomatemática.

3 SERGIO ROBERTO NOBRE

Nobre também é um importante pesquisador brasileiro nessa área. Talvez pela sua formação, Doutor em história da Matemática pela Universidade de Leipzig, na Alemanha, tenha mais importância para a história da Matemática do que Ubiratan, já que este utiliza a história da Matemática para fundamentar a Etnomatemática, enquanto Nobre trabalha outros aspectos.

Para Nobre, a maioria dos livros didáticos apresenta os conteúdos de uma forma prática, visando às aplicações de uma Matemática pronta. Em contraponto a esta situação, ele propõe que os alunos cheguem aos seus próprios resultados através de pesquisas estimuladas pelos professores. Desta forma, a Matemática soaria como algo vivo, que surge e se renova a cada novo pensamento. Veja um exemplo que é dado por esse autor:

> Uma questão primordial sobre este tema foi a tentativa de se descobrir a relação entre o perímetro de uma circunferência e seu diâmetro, ou seja, foram os estudos sobre o número π. Vários matemáticos gregos da Antiguidade ocuparam-se em descobrir tal relação; no entanto, um dos estudos mais importantes foi o realizado por Arquimedes de Siracusa, quando, através de polígonos inscritos e circunscritos, ele chega à aproximação:
>
> $$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{71}$$
>
> Para isto, Arquimedes realizou cálculos com polígonos de até 96 lados. Se naquela época, quando as condições de cálculo eram precárias, foi possível se chegar a tal aproximação, por que não trabalharmos dessa forma com os alunos nos dias de hoje, quando há calculadoras que realizam todos os tipos de cálculo necessários?

FONTE: D'Ambrosio (1996, p. 32-33)

Ensinar que o π é aproximadamente 3,14 e que a relação entre o perímetro P e o raio r de uma circunferência é $P = 2\pi r$ é fácil. No entanto, apesar da forma citada anteriormente dar mais trabalho, faz com que o aluno aprenda muito mais. Além de aprender sobre uma circunferência, aprenderá sobre polígonos circunscritos e inscritos, aprenderá sobre triângulos e sobre história da Matemática. Este processo faz o aluno perceber que a Matemática pode ser descoberta e inventada, não apenas aprendida.

4 OUTROS AUTORES

Entre os educadores pesquisadores que difundem a História da Matemática como importante ferramenta pedagógica para o ensino desta disciplina estão Irã Mendes, Eduardo Sebastiani, Michael Otte, José Roberto Boetteger Jardinetti, Newton Duarte, Adriana Dambros, Circe Mary Silva da Silva Dynnikov e outros.

Eles fazem parte de uma vanguarda que, além de seguirem autores já consagrados, como D'Ambrosio e Nobre, desenvolveram suas próprias ideias sobre o tema, contribuindo para o desenvolvimento da educação Matemática por meio de sua história.

Citamos o exemplo de Mendes (2001, p. 57), afirmando que, pelo conhecimento histórico, "o aluno é capaz de pensar e compreender as leis matemáticas a partir de certas propriedades e artifícios que são usados hoje, desde que sejam evidenciadas as dificuldades do seu processo de sistematização científica".

Perceba que nessa fala podemos encontrar elementos tanto de D'Ambrosio quanto de Nobre. Podemos concluir, então, que os estudos dos mais diversos autores nessa área se complementam e enriquecem o tema. Muitos desses autores recorrem à História da Matemática para fazerem contribuições em diversas tendências de ensino, na Matemática e fora dela.

5 TENDÊNCIAS DE ENSINO

Ao longo dos últimos anos, diversas tendências de ensino vêm surgindo e se destacando nos meios educacionais de diversos países e localidades. Algumas apenas em escolas específicas, mas, devido a bons resultados, ganham visibilidade nesse meio. Essas tendências estão ligadas aos movimentos pedagógicos de cada situação histórica, política e econômica.

Uma tendência educativa não surge do nada, mas da busca pela melhoria da qualidade de ensino. Os interesses de socialização dos conhecimentos matemáticos, os diferentes modos de entender a Matemática e as condições impostas pelos modelos econômicos são fatores que influenciam nas características dessas tendências. Elas não são específicas da Educação Matemática no Brasil, mas estão em consonância com as diversas outras que acontecessem em todo o mundo.

Muitas vezes também estão integradas com tendências de outras disciplinas, ou com tendências que não fazem a divisão dos conhecimentos por disciplinas.

Para Fiorentini (1995, p. 2), “quando tentamos identificar diferentes tendências pedagógicas que buscam a melhoria no ensino da Matemática, percebemos que a questão que se apresenta não é tão simples”. Distinguir as características das diferentes tendências exige muito estudo e compreensão das mudanças sociais e políticas, bem como dos diferentes valores e finalidades que são atribuídas ao ensino da Matemática e a relação entre professores e alunos.

Nestas variadas tendências existem aquelas que valorizam a História da Matemática e aquelas que descartam seu uso no processo de ensino e aprendizagem e sua importância no processo de concepção de que o aluno deve ter de Matemática.

5.1 TENDÊNCIAS DE ENSINO QUE NÃO VALORIZAM A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A história da educação no Brasil e no mundo já passou por várias tendências, sob influências dos mais diversos interesses. Em algumas delas, a História da Matemática não cabia nos currículos, nem mesmo a título de curiosidade, quanto mais com o objetivo de formar um indivíduo ciente da importância social e cultural da Matemática.

A **Tendência Formalista Clássica** é uma dessas tendências. Teve início no começo do século XX e decadência por volta da década de 70. Valorizava o modelo euclidiano, cuja característica principal era a sistematização lógica do conhecimento matemático a partir de elementos primitivos, axiomas, postulados, teoremas e definições.

“A partir da década de 30, estabeleceu-se a integração dos estudos matemáticos (Aritmética, Geometria, Trigonometria e Álgebra) em uma única disciplina chamada, agora, de Matemática” (FIORENTINI, 1995, p. 8).

Nesta concepção, a Matemática era platônica e não histórica, ela era pré-existe em um mundo ideal. Cabia aos homens apenas desvendá-la, descobri-la e não inventá-la ou construí-la. Ensinar Matemática tinha finalidade de desenvolver o espírito, a disciplina mental e o pensamento lógico-dedutivo, privilegiando os alunos com capacidades intelectuais especiais. A escola procurava garantir um ensino racional e rigoroso e mecanizado.

Aproximando-se dessa forma de ensino, temos a **Tendência Formalista Moderna**. As semelhanças entre as duas estão no rigor matemático e na valorização do pensamento lógico-dedutivo. As principais diferenças eram a unificação da Álgebra, da Geometria e da Aritmética através da Teoria dos Conjuntos, das Estruturas Algébricas das Relações e Funções, introduzindo nos currículos o espírito da Matemática contemporânea, cuja evolução se originou do processo de algebrização.

Esta tendência buscava enfatizar a apreensão das estruturas subjacentes ao conhecimento matemático, pois, desta forma, o aluno estaria capacitado a aplicar tais conteúdos dentro e fora da Matemática. Ficavam em segundo plano as aplicações e o caráter prático da disciplina.

No Brasil o **Movimento da Matemática Moderna (MMM)** foi que se encarregou de introduzir essa tendência. Esse movimento vinha seguindo o **Movimento Internacional de Modernização do Ensino**, que teve seu início nos Estados Unidos durante a chamada Guerra Fria.

Após a II Guerra Mundial, as potências vencedoras do conflito acabaram se dividindo em dois blocos antagônicos, os capitalistas liderados pelos EUA – Estados Unidos da América, e os socialistas, liderados pela URSS – União das Repúblicas Socialistas Soviéticas. Essa bipolarização do mundo, denominado Guerra Fria, gerou um clima de tensão no qual estes dois países disputavam áreas de influência em escala mundial. Foi marcada pela concorrência armamentista à ação da espionagem, propaganda venenosa e competição científica.

Em 1957, a antiga União Soviética conseguiu o feito de lançar ao espaço o foguete “Sputnik”, dando início à corrida espacial. Os Estados Unidos e seus aliados, vendo-se em desvantagem nessa corrida, tomaram uma série de medidas, entre elas a modernização do currículo escolar. Foi nessa modernização que surgiram os movimentos citados anteriormente.

Nessa época, o Brasil era governado pelo regime militar que estava aliado aos Estados Unidos. Surgiu no Brasil a **Tendência Tecnicista**, que tem por objetivo otimizar os resultados da escola, tornando-a eficiente e funcional. A escola se tornava uma máquina de ensinar; se o aluno tivesse um bom material aprenderia sozinho, de forma individualizada. Os livros didáticos continham atividades chamadas de “ensino programado”, em que os alunos respondiam passo a passo as sugestões e indagações dos textos até chegarem aos conhecimentos preestabelecidos.

Cabia aos professores apenas aplicar as melhores técnicas didáticas, definidas por pesquisadores especialistas em Matemática e em Psicologia da Aprendizagem, inspirada na teoria comportamentalista de aprendizagem de Skiner: estímulo-resposta, como cobaias em laboratórios. A formação, tanto para professores quanto para alunos, era meramente técnica, com o objetivo de formar indivíduos preparados para o mercado de trabalho.

Nessas três tendências, a História da Matemática ficava à margem dos currículos e do processo ensino-aprendizagem. Na primeira delas, como a Matemática era ideal, e não estava sujeita a interferência humana, não importava sua origem e tão pouco as diferentes formas como ela se apresentava ao longo dos séculos.

Como na segunda tendência, o ensino da Matemática tinha por objetivo formar cientistas para os programas de pesquisa, a história da Matemática também era vista apenas como curiosidade. Para compreender o mundo, bastava dominar um conjunto de regras modernas, sem se importar com suas origens. As regras antigas estavam obsoletas e não interessavam mais.

A Tendência Tecnicista foi a mais indiferente à História da Matemática. Como a Matemática possuía uma função técnica definida dentro de atividades práticas, sua história era absolutamente inútil. Com o objetivo de apenas treinar os alunos através de técnicas didáticas, a História da Matemática era uma perda de tempo que apenas ocupava lugar em materiais didáticos.

Deixamos para trás essas tendências que atualmente não são mais aplicadas, pelo menos não amplamente, e passamos às tendências que apreciam a História da Matemática como sendo uma importante ferramenta de ensino de Matemática.

5.2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM ALGUMAS TENDÊNCIAS DE ENSINO

Uma das primeiras tendências que vê a História da Matemática com bons olhos é a **Tendência Construtivista**, que é fundamentada na teoria de Piaget. As práticas mecânicas são substituídas por aquelas que visam à construção do pensamento lógico matemático. Para o construtivismo, o conhecimento Matemático é fruto da interação reflexiva do homem com o meio em que vive.

“A Matemática é uma construção humana construída por estruturas e relações abstratas entre formas e grandezas reais ou possíveis, ou seja, é um construto resultante da interação dinâmica do homem com o meio físico e social” (FIORENTINI, 1995, p. 20).

A criança faz a abstração de forma interativa e operante pela mente. O conhecimento é construído e não fica mais na passividade do recebimento e processamento de informações do ambiente. Os erros cometidos pelos estudantes possuem grande valor pedagógico e não são mais motivos de punição e humilhação.

Nesse contexto, a História da Matemática pode trazer subsídios para a construção dos conhecimentos. Ela pode despertar a curiosidade que levará de forma interativa ao desenvolvimento do pensamento lógico matemático.

Na **Tendência Socioculturalista**, a valorização dos conhecimentos sociais e culturais dos alunos nos leva à compreensão e ao respeito das matemáticas inerentes a cada povo. Por exemplo, em uma comunidade indígena, rural ou em periferias de grandes cidades, os conceitos matemáticos historicamente construídos deverão servir de base para as aulas.

Para Carraher et al. (1988, p. 175), "os alunos possuem uma ótima organização de suas atividades para resolver problemas em situação extraclasse, porém, nos exercícios escolares de Matemática, as dificuldades são enormes". Os conhecimentos não formais são vistos pela escola como um importante meio de desenvolvimento das estruturas cognitivas das crianças. A representação simbólica e a escrita são complicadores para o aprendizado destas crianças.

Eis aí um ponto negativo dessa tendência. Muitos professores, buscando priorizar discussões e atividades em torno de temas socioculturais, deixam de lado os conceitos e o desenvolvimento de habilidades matemáticas.

A **Tendência Histórico-Crítica** é, sem dúvida, a que mais se vale da História da Matemática em seu processo de ensino-aprendizagem. Como todos os conhecimentos são frutos das experiências históricas da humanidade, faz sentido que essas experiências facilitem o aprendizado das mais diversas disciplinas, inclusive a Matemática.

> Parte do pressuposto que a metodologia de ensino é uma construção criativa em que o professor pode produzir e articular sua visão de mundo, sua opção de vida cotidiana e histórica. Concebe a Matemática como um saber vivo, dinâmico e que vem sendo construído historicamente, atendendo às necessidades sociais e teóricas (FIORENTINI, 1995, p. 31).

A Matemática foi construída por diversos povos, de forma coletiva e para atender necessidades concretas. Está em permanente construção devido às transformações que ocorrem nas sociedades, nas ciências e no universo.

O aluno não vai mais desenvolver somente habilidades para cálculos e resolução de problemas, mas vai passar a estabelecer relações, analisar, discutir e criar a partir dos conhecimentos matemáticos. Com essa concepção, o aluno passa a ter uma visão de mundo mais completa e crítica.

As últimas duas tendências que vimos se fundem e a partir delas nasce a Etnomatemática, fornecendo o suporte teórico e científico.

6 ETNOMATEMÁTICA

Já falamos que o brasileiro Ubiratan D'Ambrosio é o precursor da Etnomatemática que, desde a década de 70, vem teorizando sobre esse assunto. Outros estudiosos que também se destacam nessa área são Sebastiani (1990), com grupos indígenas brasileiros, Carraher (1988), com trabalhadores em feiras, Grando (1988) com madeireiros e Borba (1987), com jogos e brincadeiras de crianças de favelas. É lógico que, depois desses, muitos outros também fizeram contribuições nas mais variadas comunidades.

A Matemática passa a ser vista como um saber prático, dinâmico que varia de acordo com a comunidade em que está inserida. Não é mais aquela ciência pronta acabada e ideal, como vimos nas tendências formalistas.

Para D'Ambrosio (1998, p. 5), a Etnomatemática "é um importante programa de pesquisa que caminha junto à prática escolar". Envolve arte, ciência e técnicas com explicações, conhecimentos, e entendimentos, presentes em contextos culturais específicos. Leva em consideração a história do desenvolvimento das ideias que levaram à construção daquela especificidade matemática.

A Etnomatemática sugere uma nova forma de encarar a Matemática, respeitando as diversas formas em que ela se apresenta nas comunidades segundo suas necessidades. Todavia, não podemos deixar de lado o conhecimento sistematizado e formal da Matemática, afinal nenhuma comunidade está completamente isolada e a simbologia adequada facilita o intercâmbio cultural e econômico entre elas.

LEITURA COMPLEMENTAR

O texto a seguir foi escrito pelos professores Rosa Lúcia Sverzut Baroni, Marcos Vieira Teixeira e Sergio Roberto Nobre, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP. A fonte completa você encontra na lista de referências no final do livro.

2.2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR

Embora carente de avaliações efetivas, há uma intensificação no movimento para integrar a história da Matemática na formação do professor. As funções básicas da história da Matemática nessa formação podem ser resumidas em:

- levar os professores a conhecer a Matemática do passado (função direta da história da Matemática);

- melhorar a compreensão da Matemática que eles irão ensinar (funções metodológica e epistemológica);

- fornecer métodos e técnicas para incorporar materiais históricos em sua prática (uso da história em sala de aula);

- ampliar o entendimento do desenvolvimento do currículo e de sua profissão (história do ensino de Matemática). As pesquisas que visam incluir aspectos históricos na formação do professor podem ser subdivididas em:

a) as questões que tratam de experiências na formação inicial. Exemplos:

- encontrando um lugar para a história na formação de professor de Matemática Elementar – uma experiência em Hong Kong;
- um programa pré-serviço para professores primários, implementado na Grécia e Chipre;
- um módulo histórico para estagiários de escolas secundárias – uma experiência na França.

b) as que tratam de experiências na formação em serviço. Exemplos:

- um breve curso em serviço em história da Matemática – uma experiência na Dinamarca;

- o conceito de função em um treinamento em serviço – uma experiência no Brasil.

As dificuldades encontradas no desenvolvimento desses e de outros projetos são de várias naturezas, como, por exemplo, a deficiência ou pouca confiança que o professor de Matemática (ou futuro professor) tem em seu conhecimento sobre história, política, economia; a necessidade da cooperação de profissionais de outras áreas, filósofos, por exemplo; o compromisso com outros afazeres – outras disciplinas, no caso da formação pré-serviço, ou excesso de carga didática, no caso da formação em serviço.

2.3 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E SUA INCORPORAÇÃO EM SALA DE AULA

Este item está ligado diretamente ou anterior, pois o ensino da História da Matemática tem obtido reais avanços no âmbito das universidades, mas ainda são bastante tímidas as iniciativas ou o interesse em levar a história da Matemática a alunos de Ensinos Fundamental e Médio. Uma das razões poderia ser o fato de que normalmente o professor que ensina história da Matemática em instituições de nível superior não é o mesmo das instituições de ensino básico. E, quando encontramos algum professor secundário ensinando história da Matemática, num viés pedagógico, geralmente é por diletantismo, um trabalho amador, e não por que ele tivesse sido treinado para tal. Embora lentamente, em alguns países isto está mudando. E, para que esta mudança ocorra, é preciso, em primeiro lugar, que os professores do Ensino Fundamental e Médio recebam capacitação que os tornem aptos a entender sobre a história da Matemática e a conectá-la aos conteúdos trabalhados em sala de aula.

Assim, as experiências que geram essas mudanças estão ocorrendo, apesar dos diversos argumentos desfavoráveis à utilização da história em sala de aula. Acredita-se que a história da Matemática seja um instrumento que destaca o valor da Matemática em sala de aula e mostra aos alunos a amplitude da mesma, fazendo-os perceber que a Matemática vai muito além dos cálculos. Além disso, acredita-se também que a história da Matemática pode apoiar diversas necessidades educacionais e promover mudanças. Nesse sentido, o uso da história da Matemática pode servir a diversas situações, dentre as quais as seguintes:

a) apresentar a história da Matemática como elemento mobilizador em salas de aulas numerosas ou com alunos que apresentam dificuldades de aprendizagem;

b) usar a história da Matemática na educação de adultos, promovendo a oportunidade ao aluno de observar, ao longo da história, o esforço das pessoas para superar dificuldades semelhantes àquelas que eles próprios possam vivenciar;

c) apresentar as ideias da história da Matemática a alunos bem dotados, que possam se sentir desestimulados perante a classe, satisfazendo ou dando respostas tais como "o quê?", "como?", "quando?";

d) utilizar a história da Matemática como estímulo ao uso da biblioteca;

e) humanizar a Matemática apresentando suas particularidades e figuras históricas;

f) empregar a história da Matemática para articular a Matemática com outras disciplinas, como Geografia, história, Língua Portuguesa (expressão em linguagem, interpretação de texto, literatura);

g) usar a dramatização ou produção de texto para sensibilizá-los sobre as realidades do passado e presente, apresentando as dificuldades e diferenças de cada época.

Outra questão que surge a partir disso é: como fundamentar, ilustrar, realizar ou implementar tais ações? Essa é a grande e mais polêmica questão. Até o momento não há consenso estabelecido. Embora tenhamos vários exemplos de experiências realizadas, as avaliações são excessivamente acanhadas, não permitindo, ainda, estabelecer parâmetros de conformidade. Vamos listar algumas formas de integrar a história da Matemática em sala de aula, mas observamos que qualquer uma delas apresenta dificuldades inerentes à própria atividade, além de requerer preparo e disposição do professor que vai colocá-la em prática. Destacamos:

a) desenvolvimento de projetos inspirados pela história. Exemplos:
   - uma introdução heurística à análise inspirada pelo seu desenvolvimento histórico;
   - como a História pode ajudar no ensino de conceitos probabilísticos;
   - trigonometria na ordem histórica.

b) aspectos culturais da Matemática numa perspectiva histórica. Exemplos:
   - sistemas numéricos e suas representações;
   - teorema de Pitágoras em diferentes culturas.

c) tratamento detalhado de exemplos particulares. Exemplos:
   - como conceitos elementares de geometria euclidiana foram usados para resolver problemas de sobrevivência em tempos passados;
   - teoria da proporção e a geometria de áreas;
   - a relação entre Geometria e Física.

d) aperfeiçoando do conhecimento matemático, por meio da história da Matemática. Exemplo:
   - história da Educação Matemática;
   - ensinando matemática no Ensino Médio numa perspectiva histórica;
   - a história e a educação de adultos – ensinando sobre e por meio da história da Matemática.

Também o uso de fontes originais como recurso tem sido observado, mas dentre as várias atividades possíveis, para as quais os aspectos históricos podem ser integrados ao ensino de Matemática, o estudo de uma fonte original é a mais exigente e que demanda mais tempo. Em muitos casos, uma fonte requer um entendimento detalhado e aprofundado da época em que foi escrita, do contexto geral de ideias, além do entendimento da língua. Podemos destacar três ideias gerais que poderiam descrever melhor os efeitos de estudar uma fonte. Estas são as noções de:

- *substituição*: permite ver a Matemática como uma atividade intelectual ao invés de apenas um corpo de conhecimentos ou um conjunto de técnicas;
- *reorientação*: a história nos lembra que alguns conceitos matemáticos foram criados e que isto não ocorreu por geração espontânea;
- *compreensão cultural*: a história nos convida a colocar o desenvolvimento da Matemática no contexto científico e tecnológico de um período particular e na história das ideias e sociedades, e também a olhar a história do Ensino da Matemática a partir de perspectivas que se encontram fora das fronteiras estabelecidas pelos conteúdos das disciplinas.

Assim, o uso desse recurso possibilita discutir vários aspectos:

- o valor específico e a qualidade de fontes primárias;
- a compreensão da evolução das ideias;
- a relatividade da verdade e a dimensão humana da atividade matemática;
- as relações entre Matemática e Filosofia;
- as perspectivas em Educação Matemática;
- a integração de fontes primárias em cursos de formação de professor;
- a integração de fontes primárias em sala de aula;
- as estratégias didáticas para integrar fontes.

As dificuldades inerentes à utilização de fontes históricas podem se tornar mais amenas nos casos em que se pode lançar mão de recursos não convencionais, tais como programas computacionais, www, dramatização. Esses recursos, quando disponíveis, podem oferecer oportunidades de melhorar ou mesmo de que aconteçam experiências educacionais importantes.

RESUMO DO TÓPICO 4

Neste tópico, você estudou que:

- A História da Matemática é uma poderosa aliada do professor no ensino de Matemática.

- O brasileiro Ubiratan D'Ambrosio é um dos maiores estudiosos do mundo nesta área, sendo reconhecido como um dos pais da Etnomatemática.

- Muitos outros autores defendem esta linha de ensino, entre eles o professor Sérgio Roberto Nobre.

- Algumas tendências de ensino defendem a história da Matemática enquanto outras não abrem espaço para o seu uso em sala de aula.

- Etnomatemática propõe o respeito pela Matemática dentro das diversas formas que ela se apresenta nas comunidades segundo suas necessidades.

AUTOATIVIDADE

1 Segundo D'Ambrosio, para que serve a História da Matemática?

2 O que Nobre propõe para a história da Matemática em sala de aula?

3 Quais as tendências de ensino que privilegiam a história da Matemática e quais suas características?

4 Quais as tendências que discriminam a história da Matemática e como isto ocorre em cada uma?

5 O que é a Etnomatemática?

REFERÊNCIAS

ARRUDA, José Jobson; PILLETI, Nelson. **Toda a história**: história geral e do Brasil. São Paulo: Ática, 1997.

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; TEIXEIRA, Marcos Vieira; NOBRE; Sérgio Roberto. A Investigação Científica em História da Matemática e suas Relações com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. In: **Educação matemática, pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2005. p. 170-174.

BÍBLIA, Português. **Bíblia Sagrada**: nova tradução na linguagem de hoje. Barueri: Sociedade Bíblica do Brasil, 2005.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

CAJORI, Florian. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna LTDA, 2007.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradiva, 2000.

CARRAHER, Terezinha Nunes et al. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática – uma breve história**. São Paulo: Livraria da Física, 2006. v. 1.

CRESPO, Antônio Arnot. **Estatística fácil**. São Paulo: Saraiva, 2009.

DANTE, Luiz Roberto.**Tudo é matemática, 7ª série**. São Paulo: Ática, 2005.

D'AMBROSIO, Ubiratan. História da matemática e educação. **Cadernos CEDES** – história e educação matemática, Campinas: Papirus, n. 40, p. 7-17, 1996.

______. **Etnomatemática**. São Paulo: Ática, 1998.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: UNICAMP, 2004.

FIORENTINI, Dário. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. Zetetiké, Campinas: Unicamp, ano 3, n. 4, p. 1-36, 1995.

FLORIANI, José Valdir. **Função logarítmica**. Blumenau: Ed. da FURB, 1999.

FONTES, Hélio. **No passado da matemática**. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1969.

FUNARI, Pedro Paulo; NOELLI, Francisco Silva. **Pré-história do Brasil**. São Paulo: Contexto, 2005.

GALVÃO, Maria Elisa Esteves Lopes. **História da matemática**: dos números a geometria. Osasco: EDIFIEO, 2008.

GARBI, Gilberto Geraldo. **O romance das equações algébricas**. São Paulo: Makron Books, 1997.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática**: uma nova abordagem. São Paulo: FTD, 2000.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI Jr., José Ruy. **Matemática**: uma nova abordagem. São Paulo: FTD, 2003.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 2.

______. **Os números**: a história de uma grande Invenção. São Paulo: Globo, 2001.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Microdicionário de matemática**. São Paulo: Scipione, 1998.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática no ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1.

MENDES, I. A. **O uso da história no ensino da matemática, reflexões teóricas e experiências**. Belém: UEPA, 2001.

MIGUEL, Antônio et al. **História da matemática em atividades didáticas**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides**. São Paulo: Geração, 2005.

NOBRE, Sergio Roberto. Alguns "porquês" na história da matemática e suas contribuições para a educação matemática. **Cadernos CEDES** – História e Educação Matemática, Campinas: Papirus, n. 40, p. 29-35, 1996.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995. v. 1.

______. **Matemática**. São Paulo: Moderna. 1999.

RIBEIRO, Berta. Arte indígena, linguagem visual, 1989. In: SILVA, Aracy Lopes da; GRUPIONI, Luis Donisete Benzi (Orgs.). **A temática indígena na escola, novos subsídios para professores de 1º e 2º Graus**. Brasília: MEC/MARI/UNESCO, 1995. p. 387-389.

TIPLER, Paul A. **Física**. Rio de Janeiro: LTC, 2000. v. 1.

WHITE, Michael. **Personagens que mudaram o mundo, os grandes cientistas, Isaac newton**. Rio de Janeiro: Globo, 1993.

ANOTAÇÕES